Украинский математический журнал, 3 (2002), т.54 с.332-341.

УДК 517.5

Восстановление функции по информации о ее значениях в узлах треугольной сетки, основанное на пополнении данных

Лигун А.А., Шумейко А.А.
Днепродзержинский гос. технический университет,
Днепропетровский юридический институт МВД Украины

Восстановление функции по ее значениям в узлах регулярной решетки является классической задачей теории аппроксимации. В последнее время, наряду с классическими методами восстановления основанными на использовании алгебраических и тригонометрических полиномов и сплайнов, широко используются методы основанные на использовании всплесков (см. [1]) или методы, основанные на пополнении данных.

В данной работе изучается линейный метод восстановления поверхности по ее значениям в узлах правильной треугольной решетки, основанный на пополнении двумерных данных. Доказывается, что построенный оператор восстановления является линейным оператором сумматорного типа с базисной функцией имеющей малый носитель. Установлено, что базисные функции представимы в виде конечной линейной комбинации сжатых в два раза и сдвинутых тех же базисных функций, что позволяет использовать их в качестве масштабирующих функций в кратномасштабном анализе (см., [1] глава 5, [4]).

Через $\ell_\infty(\mathbb{R}^2)$ обозначим линейное пространство всех ограниченных массивов $F = \{f_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ с нормой

$$\|F\|_{\ell_\infty(\mathbb{R}^2)} = \sup_{i,j\in\mathbb{Z}} |f_{i,j}|.$$

Пусть $\boldsymbol{\ell}$=$\{\boldsymbol{\ell_0},\ \boldsymbol{\ell_1}\}$ пара неколлиниарных радиус-векторов на плоскости XOY.

Пусть $\Delta^0 = \Delta^0(\boldsymbol{\ell}) = \{i\boldsymbol{\ell_0} + j\boldsymbol{\ell_1}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ – решетка порожденная этими векторами и $M_{i,j}$ ее узлы.

Зададим на множестве ограниченных массивов F^0 линейные функционалы B_1, B_2, B_3 и положим $\mathbf{B} = \{B_1, B_2, B_3\}$.

Обозначим через $F^0_{\nu,\mu} = \{f_{i+\nu,j+\mu,0}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ сдвиг массива F^0 и определим узлы решетки Δ^k и массив $F^k = \{f_{i,j,k}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$, $k\in\mathbb{N}$ рекуррентными соотношениями

$$\begin{array}{llll} M_{2i,2j,k} & = M_{i,j,k-1}, & f_{2i,2j,k} & = f_{i,j,k-1}, \\ M_{2i+1,2j,k} & = 0.5(M_{i,j,k-1} + M_{i+1,j,k-1}), & f_{2i+1,2j,k} & = B_1(F^{k-1}_{i,j}), \\ M_{2i,2j+1,k} & = 0.5(M_{i,j,k-1} + M_{i,j+1,k-1}), & f_{2i,2j+1,k} & = B_2(F^{k-1}_{i,j}), \\ M_{2i+1,2j+1,k} & = 0.5(M_{i+1,j,k-1} + M_{i,j+1,k-1}), & f_{2i+1,2j+1,k} & = B_3(F^{k-1}_{i,j}). \end{array} \tag{1}$$

Непрерывную на $\mathbb{R}^2$ функцию двух переменных назовем k-полигоном с узлами в точках $M_{i,j,k}$, если для всех $i,j\in\mathbb{Z}$ на каждом треугольнике $\mathbb{T}^+_{i,j+1,k}$ с вершинами в точках $M_{i+1,j,k}$, $M_{i,j,k}$, $M_{i,j+1,k}$ и треугольнике $\mathbb{T}^-_{i+1,j,k}$ с вершинами в точках $M_{i,j+1,k}$, $M_{i+1,j,k}$, $M_{i+1,j+1,k}$ она совпадает с некоторой плоскостью (своей для каждого треугольника).

Через $g_k(F,\mathbf{B},\boldsymbol{\ell},x,y)$ обозначим k-полигон интерполирующий в узлах $M_{i,j,k}$ значения $f_{i,j,k}$. Для любого $k\in\mathbb{N}$ $g_k(F,\mathbf{B},\boldsymbol{\ell})$ есть линейный оператор, отображающий пространство $\ell_\infty(\mathbb{R}^2)$ в пространство ограниченных на всей плоскости k-полигонов.

Если при $k\to\infty$ предел последовательности $g_k(F,\mathbf{B},\boldsymbol{\ell},x,y)$ существует, то будем обозначать его через $g(F,\mathbf{B},\boldsymbol{\ell},x,y)$. В дальнейшем будем рассматривать лишь те функционалы B_ν ($\nu = 1,2,3$), для которых $g(F,\mathbf{B},\boldsymbol{\ell},x,y)$ существует.

Если функция f определенна в точках $M_{i,j}$ и $f_{i,j}=f(M_{i,j})$ $i,j\in\mathbb{Z}$, то вместо $g_k(F,\mathbf{B},\boldsymbol{\ell})$ и $g(F,\mathbf{B},\boldsymbol{\ell})$ будем писать $g_k(f,\mathbf{B},\boldsymbol{\ell})$ и $g(f,\mathbf{B},\boldsymbol{\ell})$, соответственно.

Из способа построения оператора $g_k(\mathbf{B},\boldsymbol{\ell})$ следует, что для любых $k,\nu=0,1,2,\dots$ имеет место равенство

$$g_k\left(F^{\nu},\mathbf{B},2^{-\nu}\boldsymbol{\ell}\right)=g_{k+\nu}\left(F,\mathbf{B},\boldsymbol{\ell}\right) \tag{2}$$

и для $\nu\le k$

$$g_k\left(F,\mathbf{B},\boldsymbol{\ell}\right)=g_k\left(g_\nu(F,\mathbf{B},\boldsymbol{\ell}),\mathbf{B},\boldsymbol{\ell}\right). \tag{3}$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$ в (2), получаем

$$g\left(F^{\nu},\mathbf{B},2^{-\nu}\boldsymbol{\ell}\right)=g\left(F,\mathbf{B},\boldsymbol{\ell}\right), \tag{4}$$

а предельный переход в (3) дает равенство

$$g\left(F,\mathbf{B},\boldsymbol{\ell}\right)=g\left(g\left(F,\mathbf{B},\boldsymbol{\ell}\right),\mathbf{B},\boldsymbol{\ell}\right). \tag{5}$$

Кроме того

$$g\left(F_{\nu,\mu},\mathbf{B},\boldsymbol{\ell},x,y\right)=g\left(F,\mathbf{B},\boldsymbol{\ell},x-\nu|\boldsymbol{\ell_0}|,y-\mu|\boldsymbol{\ell_1}|\right) \tag{6}$$

и если $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_0,\alpha_1)$ $(\alpha_0,\alpha_1\in\mathbb{R})$ и $\boldsymbol{\ell(\alpha)}=\{\alpha_0\boldsymbol{\ell_0},\ \alpha_1\boldsymbol{\ell_1}\}$, то

$$g\left(F,\mathbf{B},\boldsymbol{\ell},x,y\right)=g\left(F,\mathbf{B},\boldsymbol{\ell(\alpha)},\frac{\alpha_0}{|\boldsymbol{\ell_0}|}x,\frac{\alpha_1}{|\boldsymbol{\ell_1}|}y\right). \tag{7}$$

Положим

$$B_1(F^0)=\frac{f_{1,0,0}+f_{0,0,0}}{2}-\frac{1}{8}\Delta_x^2\left(\frac{f_{1,0,0}+f_{0,0,0}}{2}\right), \tag{8}$$

$$B_2(F^0)=\frac{f_{0,0,0}+f_{0,1,0}}{2}-\frac{1}{8}\Delta_y^2\left(\frac{f_{0,0,0}+f_{0,1,0}}{2}\right), \tag{9}$$

$$B_3(F^0)=\frac{f_{1,0,0}+f_{0,1,0}}{2}-\frac{1}{8}\Delta_{x,y}^2\left(\frac{f_{1,0,0}+f_{0,1,0}}{2}\right), \tag{10}$$

где

$$\Delta_x^2 Z_{i,j}=Z_{i+1,i}-2Z_{i,j}+Z_{i-1,i},$$
$$\Delta_y^2 Z_{i,j}=Z_{i,j+1}-2Z_{i,j}+Z_{i,j-1},$$
$$\Delta_{x,y}^2 Z_{i,j}=Z_{i-1,j+1}-2Z_{i,j}+Z_{i+1,j-1}.$$

В этом случае вместо $g_k(F,\mathbf{B},\boldsymbol{\ell},x,y)$ будем писать $g_k(F,\boldsymbol{\ell},x,y)$.

Функционалы вида (8) неоднократно использовались в задачах связанных с пополнением данных (см., например, [2] – [4]).

Пусть

$$\Delta_x g_k(F,\boldsymbol{\ell},x,y)=g_k(F,\boldsymbol{\ell},x+2^{-k}|\boldsymbol{\ell_0}|,y)-g_k(F,\boldsymbol{\ell},x,y),$$
$$\Delta_y g_k(F,\boldsymbol{\ell},x,y)=g_k(F,\boldsymbol{\ell},x,y+2^{-k}|\boldsymbol{\ell_1}|)-g_k(F,\boldsymbol{\ell},x,y),$$
$$\Delta_{x,y} g_k(F,\boldsymbol{\ell},x,y)=g_k(F,\boldsymbol{\ell},x-2^{-k}|\boldsymbol{\ell_0}|,y+2^{-k}|\boldsymbol{\ell_1}|)-g_k(F,\boldsymbol{\ell},x,y)$$

и

$$\|\delta g_k(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)}=\max\{\|\Delta_x g_k(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)},\|\Delta_y g_k(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)},\|\Delta_{x,y} g_k(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)}\}, \tag{11}$$

где, как обычно,

$$\|Z\|_{C(\mathbb{R}^2)}=\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}|Z(x,y)|.$$

Теорема 1. *Для любого массива $F \in \ell_\infty(\mathbb{R}^2)$ и произвольных фиксированных $k, \mu \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$\|g_{k+\mu}(F,\boldsymbol{\ell}) - g_k(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)} < \frac{5}{24}\|\delta g_k(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)}. \tag{12}$$

Доказательство. Для ограниченной последовательности $\mathbf{f} = \{f_{i,0}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и равномерного разбиения оси точками $x_{i,0} = ih$, $i \in \mathbb{Z}, h > 0$ положим

$$x_{2i,k} = x_{i,k-1}, \quad f_{2i,k} = f_{i,k-1}, \tag{13}$$

и

$$x_{2i+1,k} = \frac{x_{i,k-1} + x_{i+1,k-1}}{2}, \tag{14}$$

$$f_{2i+1,k} = \frac{f_{i,k} + f_{i+1,k}}{2} - \frac{1}{8}\Delta^2\left(\frac{f_{i,k} + f_{i+1,k}}{2}\right). \tag{15}$$

Через $\varphi_{k,h}(\mathbf{f})$ обозначим ломаную с узлами в точках $x_{i,k}$, принимающую значения $f_{i,k}$ в узлах. Предел этой ломаной при $k \to \infty$ обозначим через $\varphi_h(\mathbf{f})$.

Подробно методы восстановления $\varphi_{k,h}(\mathbf{f})$ и $\varphi_h(\mathbf{f})$ изучались в работе [4]. Здесь, в частности доказано, что для любой ограниченной последовательности и произвольных фиксированных $k, \mu \in \mathbb{N}$, имеют место неравенства

$$\|\Delta\varphi_{k+1,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})} \le \frac{5}{8}\|\Delta\varphi_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}, \tag{16}$$

и

$$|\varphi_{k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+1,k+1}) - \varphi_{k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+1,k+1})| \le \frac{5}{64}\|\Delta\varphi_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}, \tag{17}$$

где

$$\Delta\varphi_{k,h}(\mathbf{f}, x) = \varphi_{k,h}\left(\mathbf{f}, x + \frac{h}{2^k}\right) - \varphi_{k,h}(\mathbf{f}, x).$$

Из определения (11), соотношения (16), конструкции метода и очевидного равенства

$$\|\delta g_0(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)} = \|\delta(F)\|_{\ell_\infty(\mathbb{R}^2)},$$

следует, что для любого массива $F \in \ell_\infty(\mathbb{R}^2)$ и произвольных фиксированного $k \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\|\delta g_{k+1}(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)} \le \left(\frac{5}{8}\right)^{k+1}\|\delta(F)\|_{\ell_\infty(\mathbb{R}^2)}, \tag{18}$$

где

$$\|\delta(F)\|_{\ell_\infty(\mathbb{R}^2)} = \max\{\|\Delta_x F\|_{\ell_\infty(\mathbb{R}^2)},\ \|\Delta_y F\|_{\ell_\infty(\mathbb{R}^2)}, \|\Delta_{x,y} F\|_{\ell_\infty(\mathbb{R}^2)}\},$$

и

$$\|\Delta_x F\|_{\ell_\infty(\mathbb{R}^2)} = \max_{i,j\in\mathbb{Z}}|f_{i+1,j,0} - f_{i,j,0}|, \|\Delta_y F\|_{\ell_\infty(\mathbb{R}^2)} = \max_{i,j\in\mathbb{Z}}|f_{i,j+1,0} - f_{i,j,0}|,$$
$$\|\Delta_{x,y} F\|_{\ell_\infty(\mathbb{R}^2)} = \max_{i,j\in\mathbb{Z}}|f_{i+1,j,0} - f_{i,j+1,0}|.$$

Пусть $\mu = 1$ и, например, $(x,y) \in \mathbb{T}^+_{i,j,k}$. Ясно, что $g_{k+1}(F,\boldsymbol{\ell},x,y) - g_k(F,\boldsymbol{\ell},x,y)$ является (k+1)-полигоном. Отсюда и из того факта, что

$$g_{k+1}(F,\boldsymbol{\ell},x_{i,j,k},y_{i,j,k}) - g_k(F,\boldsymbol{\ell},x_{i,j,k},y_{i,j,k}) = 0.$$

Тогда

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{T}^+_{i,j,k}}\|g_{k+1}(F,\boldsymbol{\ell}) - g_k(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)} =$$

$$= \max\{|g_{k+1}(F,\boldsymbol{\ell},M_{2i+1,2j-2,k+1}) - g_k(F,\boldsymbol{\ell},M_{2i+1,2j-2,k+1})|, |g_{k+1}(F,\boldsymbol{\ell},M_{2i+1,2j-1,k+1}) -$$

$$-g_k(F,\boldsymbol{\ell},M_{2i+1,2j-1,k+1})|,|g_{k+1}(F,\boldsymbol{\ell},M_{2i,2j-1,k+1})-g_k(F,\boldsymbol{\ell},M_{2i,2j-1,k+1})|\}.$$

Отсюда и из (17) получаем

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{T}^+_{i,j,k}}\|g_{k+1}(F,\boldsymbol{\ell},x,y)-g_k(F,\boldsymbol{\ell},x,y)\|_{C(\mathbb{R}^2)}\le\frac{5}{64}\|\delta g_k(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)}.$$

Для $(x,y)\in\mathbb{T}^-_{i,j,k}$ доказательство проводится аналогично.

Пусть, теперь, $\mu>1$, тогда

$$\|g_{k+\mu}(F,\boldsymbol{\ell})-g_k(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)}\le\|g_{k+1}(F,\boldsymbol{\ell})-g_k(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)}+$$

$$+\|g_{k+2}(F,\boldsymbol{\ell})-g_{k+1}(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)}+\ldots+\|g_{k+\mu}(F,\boldsymbol{\ell})-g_{k+\mu-1}(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)}\le$$

$$\le\frac{5}{64}\|\delta g_k(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)}+\frac{5}{64}\|\delta g_{k+1}(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)}+\ldots+\frac{5}{64}\|\delta g_{k+\mu-1}(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)}.$$

Отсюда и из (18) следует, что

$$\|g_{k+\mu}(F,\boldsymbol{\ell})-g_k(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)}\le$$

$$\le\frac{5}{64}\|\delta g_k(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)}\left(1+\frac{5}{8}+\left(\frac{5}{8}\right)^2+\ldots+\left(\frac{5}{8}\right)^{\mu-1}\right)<$$

$$<\frac{5}{64}\|\delta g_k(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)}\frac{8}{3}=\frac{5}{24}\|\delta g_k(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)}.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 1 и неравенства (18) получаем

$$\|g_{k+\mu}(F,\boldsymbol{\ell})-g_k(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)}<\frac{5}{24}\left(\frac{5}{8}\right)^k\|\delta(F)\|_{\ell_\infty(\mathbb{R}^2)}. \tag{19}$$

Следовательно, последовательность $g_k(F,\boldsymbol{\ell},x,y)$ сходится в себе. Нетрудно видеть, что $g_k(F,\boldsymbol{\ell},x,y)$ ограничена (более того, далее мы покажем, что нормы операторов $g_k(\boldsymbol{\ell})$ действующих из $\ell_\infty(\mathbb{R}^2)$ в $C(\mathbb{R}^2)$ по правилу $F\to g_k(F,\boldsymbol{\ell})$ ограничены в совокупности и невелики). Отсюда следует, что равномерный предел $g_k(F,\boldsymbol{\ell},x,y)$ при $k\to\infty$ существует. Обозначим этот предел через $g(F,\boldsymbol{\ell},x,y)$.

Переходя к пределу по $\mu\to\infty$ в (19), получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любого массива $F\in\ell_\infty(\mathbb{R}^2)$ и $k\in\mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$\|g(F,\boldsymbol{\ell})-g_k(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)}<\frac{5}{24}\|\delta g_k(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)}<\frac{5}{24}\left(\frac{5}{8}\right)^k\|\delta(F)\|_{\ell_\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Если $\mathfrak{S}\in\mathbb{R}^2$ множество конечной меры, то положим

$$\|f\|_{p(\mathfrak{S})}=\left(\int_{\mathfrak{S}}|f(x,y)|^p dxdy\right)^{1/p},\|f\|_{C(\mathfrak{S})}=\max_{(x,y)\in\mathfrak{S}}|f(x,y)|.$$

Следствие 1. *Пусть $p\in[1,\infty)$, $k\in\mathbb{N}$. Для любого массива $F\in\ell_\infty(\mathbb{R}^2)$ имеют место неравенства*

$$\left|\|g(F,\boldsymbol{\ell})\|_{p(\mathfrak{S})}-\|g_k(F,\boldsymbol{\ell})\|_{p(\mathfrak{S})}\right|\le(\operatorname{mes}\mathfrak{S})^{1/p}\frac{5}{24}\|\delta g_k(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)} \tag{20}$$

и

$$\|g_k(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathfrak{S})}\le\|g(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathfrak{S})}\le\|g_k(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathfrak{S})}+\frac{5}{24}\|\delta g_k(F,\boldsymbol{\ell})\|_{C(\mathbb{R}^2)}. \tag{21}$$

Соотношение (21) верно и для случая, когда $\mathfrak{S}=\mathbb{R}^2$.

Левая часть неравенства (21) следует из того факта, что $g_k(F,\boldsymbol{\ell})$ есть полигон интерполирующий $g(F,\boldsymbol{\ell})$ в узлах.

Всюду далее будем считать, что $\boldsymbol{\ell_0}=(h,0)$ и $\boldsymbol{\ell_1}=(h/2,h^*)$, где $h^*=h\sqrt{3}/2$. В этом случае вместо $g_k(F,\boldsymbol{\ell})$ и $g(F,\boldsymbol{\ell})$ будем писать $g_{k,h}(F)$ и $g_h(F)$ соответственно.

Пусть $h=1$ и $F^*=F^{*,0}=\{f^*_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ такова, что $f^*_{i,j}=\delta_{|i|+|j|,0}$ ($\delta_{\nu,\mu}-$ символ Кронекера). Положим

$$G_k(x,y)=g_{k,1}(F^*,x,y),\quad G(x,y)=g_1(F^*,x,y).$$

Из линейности операторов $g_{k,h}$ и g_h следует, что для любого массива $F\in\ell_\infty(\mathbb{R}^2)$, любых $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ и $h>0$ имеют место равенства

$$g_h(f,x,y)=\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}f_{i,j}G\left(\frac{x}{h}-i,\frac{y}{h^*}-j\right) \tag{22}$$

и

$$g_{k,h}(f,x,y)=\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}f_{i,j}G_k\left(\frac{x}{h}-i,\frac{y}{h^*}-j\right). \tag{23}$$

Ясно, что носителем функции $G_k(x,y)$ является шестиугольник $\mathfrak{D}_k$ с вершинами в точках

$$M_1^k\left(\left(-3+\frac{1}{2^k}\right),0\right),\quad M_2^k\left(\frac{-3+\frac{1}{2^k}}{2},\left(-3+\frac{1}{2^k}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$M_3^k\left(\frac{3-\frac{1}{2^k}}{2},\left(3-\frac{1}{2^k}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad M_4^k\left(\left(3-\frac{1}{2^k}\right),0\right),$$

$$M_5^k\left(\frac{3-\frac{1}{2^k}}{2},\left(-3+\frac{1}{2^k}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad M_6^k\left(\frac{-3+\frac{1}{2^k}}{2},\left(-3+\frac{1}{2^k}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

и, следовательно, носителем функции $G(x,y)$ является правильный шестиугольник $\mathfrak{D}$ с вершинами в точках $(\pm3,0)$, $(\pm3/2,\pm3\sqrt{3}/2)$.

Таким образом для $(x,y)\in\mathbb{T}^{\pm}_{i,j,k}$ выполняются равенства

$$g_{k,h}(f,x,y)=\sum_{\nu,\mu:(\nu-i,\mu-j)\in\mathfrak{D}_k}f_{\nu,\mu}G_k\left(\frac{x}{h}-\nu,\frac{y}{h^*}-\mu\right) \tag{24}$$

и

$$g_h(f,x,y)=\sum_{\nu,\mu:(\nu-i,\mu-j)\in\mathfrak{D}}f_{\nu,\mu}G\left(\frac{x}{h}-\nu,\frac{y}{h^*}-\mu\right). \tag{25}$$

Теорема 3. *Для всех $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ имеет место равенство*

$$G(x,y)=G(2x,2y)+\frac{1}{16}\sum_{\nu=0}^{5}\left(9G\left(2x-\cos\frac{\pi}{3}\nu,2y-\sin\frac{\pi}{3}\nu\right)-\right.$$
$$\left.-G\left(2x-3\cos\frac{\pi}{3}\nu,2y-3\sin\frac{\pi}{3}\nu\right)\right). \tag{26}$$

Доказательство. Из (25) и (4) следует, что

$$G(x,y)=g_1(F^{*,0},x,y)=g_{1/2}(F^{*,1},x,y)=$$

$$=g_{1/2}\left(\sum_{(\nu,\mu)\in\mathfrak{D}}f^{*,1}_{\nu,\mu}F^{*,0}_{\nu,\mu},x,y\right)=\sum_{(\nu,\mu)\in\mathfrak{D}}f^{*,1}_{\nu,\mu}g_{1/2}\left(F^{*,0}_{\nu,\mu},x,y\right).$$

Теперь последовательно используя равенства (6) и (7), получаем

$$G(x,y)=\sum_{(\nu,\mu)\in\mathfrak{D}} f^{*,1}_{\nu,\mu} g_{1/2}\left(F^{*,0}, x-\nu h, y-\mu h^*\right)=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in\mathfrak{D}} f^{*,1}_{\nu,\mu} g_{1}\left(F^{*,0}, 2x-\nu h, 2y-\mu h^*\right)$$

или, что то же

$$G(x,y)=\sum_{\nu,\mu\in\mathfrak{D}} f^{*}_{\nu,\mu,1} G\left(2x-\nu\frac{1}{2}, 2y-\mu\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \tag{27}$$

Непосредственно вычисляя значения $f^{*}_{\nu,\mu,1}$, отсюда получаем утверждение теоремы 3.

Пусть $f\in C(\mathbb{R}^2)$ и $\|g_h\|_{C(\mathbb{R}^2)\to C(\mathbb{R}^2)}$ – норма оператора g, действующего из пространства $C(\mathbb{R}^2)$ в пространство $C(\mathbb{R}^2)$, то есть

$$\|g_h\|_{C(\mathbb{R}^2)\to C(\mathbb{R}^2)}=\sup_{\|f\|_{C(\mathbb{R}^2)}\le 1}\|g_h(f)\|_{C(\mathbb{R}^2)}.$$

Положим

$$N_k(x,y)=\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\left|G_k\left(x-i\frac{1}{2}, y-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|$$

и

$$N(x,y)=\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\left|G\left(x-i\frac{1}{2}, y-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|. \tag{28}$$

Теорема 4. *Справедливо равенство*

$$\|g_h\|_{C(\mathbb{R}^2)\to C(\mathbb{R}^2)}=\|N\|_{C(\mathbb{R}^2)}. \tag{29}$$

Кроме того, для любого $k\in\mathbb{N}$ *и* $h>0$

$$\|N_k\|_{C(\mathbb{R}^2)}\le\|g_h\|_{C(\mathbb{R}^2)\to C(\mathbb{R}^2)}\le\|N_k\|_{C(\mathbb{R}^2)}+12\|\delta N_k\|_{C(\mathbb{R}^2)}. \tag{30}$$

Доказательство. Пусть f произвольная функция из $C(\mathbb{R}^2)$, такая, что $\|f\|_{C(\mathbb{R}^2)}\le 1$, тогда в силу (22)

$$\|g_h(f)\|_{C(\mathbb{R}^2)}\le\left\|\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} f_{i,j} G\left(\frac{(\cdot)}{h}-i, \frac{(\cdot\cdot)}{h^*}-j\right)\right\|_{C(\mathbb{R}^2)}=$$

$$=\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\left|\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} f_{i,j} G\left(\frac{x}{h}-i, \frac{y}{h^*}-j\right)\right|\le$$

$$\le\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\left|f_{i,j} G\left(\frac{x}{h}-i, \frac{y}{h^*}-j\right)\right|\le$$

$$\le\sup_{i,j\in\mathbb{Z}}|f_{i,j}|\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\left|G\left(x-i\frac{1}{2}, y-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|\le$$

$$\le\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\left|G\left(x-i\frac{1}{2}, y-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}N(x,y). \tag{31}$$

Из 1-периодичности функции $N(x,y)$ по переменной x и $\sqrt{3}$-периодичности по переменной y, а также из ее непрерывности следует, что существует точка $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^{+}_{0,0,0}$ такая, что

$$N\left(x_0, y_0\right) = \max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} N(x,y).$$

Через $f_0(x,y)$ обозначим непрерывную функцию, принимающую значения

$$\operatorname{sgn} G\left(x_0 - i, y_0 - j\right)$$

в точках (ih, jh^*) и любые значения из $(-1,1)$ в остальных точках из $\mathbb{R}^2$. Тогда

$$\|g_h\|_{C(\mathbb{R}^2)\to C(\mathbb{R}^2)} \geq \frac{\|g_h(f_0)\|_{C(\mathbb{R}^2)}}{\|f_0\|_{C(\mathbb{R}^2)}} = \|g_h(f_0)\|_{C(\mathbb{R}^2)} \geq$$

$$\geq |f_0(x_0h, y_0h^*)| = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn} G\left(x_0 - i, y_0 - j\right) G\left(x - i, y - j\right) = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} N(x,y),$$

что вместе с (31) доказывает равенство (29).

Для доказательства равенства (30) достаточно учесть равенство (21) и тот факт, что в соотношении (22) не более чем 54 слагаемых отличны от нуля.

Отметим, что функция $N(x,y)$ обладает более сильной симметрией, чем периодичность по каждой переменной, а именно, если через (x_φ, y_φ) обозначим точку $(x,y) \in \mathbb{T}^{\pm}_{i,j,k}$, полученную поворотом на угол φ (в положительном направлении) вокруг центра треугольника $\mathbb{T}^{\pm}_{i,j,k}$, то для любых $n_0, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$N(x,y) = N\left(x_{n_0\pi/3} \pm n_1 h, y_{n_0\pi/3} \pm n_2 h^*\right).$$

Положим для $(x,y) \in \mathbb{T}^{\pm}_{0,0,0}$

$$K_{n,m}(x,y) = x^n y^m - \sum_{\nu,\mu:(\nu,\mu)\in\mathfrak{D}} \nu^n \left(\mu\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m G\left(\frac{x}{h} - \nu, \frac{y}{h^*} - \mu\right),$$

где $n, m \geq 0 : n + m = 4$.

Для функции f такой, что

$$\frac{\partial f^{\nu+\mu}}{\partial x^\nu \partial y^\mu} \in C(\mathbb{R}^2) \quad \nu,\mu = 0,1,\ldots,4, \quad \nu+\mu = 4$$

введем модуль непрерывности

$$\omega\left(f^{IV}, t\right) = \max_{\nu+\mu=4} \sup_{|M'-M''|<t} \left| \frac{\partial f^{\nu+\mu}}{\partial x^\nu \partial y^\mu}(M') - \frac{\partial f^{\nu+\mu}}{\partial x^\nu \partial y^\mu}(M'') \right|.$$

Теорема 5. *Пусть функция f такова, что*

$$\frac{\partial f^{\nu+\mu}}{\partial x^\nu \partial y^\mu} \in C(\mathbb{R}^2) \quad \nu,\mu = 0,1,\ldots,4, \quad \nu+\mu \leq 4,$$

тогда для $(x,y) \in \mathbb{T}^{\pm}_{i,j,k}$ равномерно по $i,j \in \mathbb{Z}$ и $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ выполняется соотношение

$$|f(x,y) - g_h(f,x,y)| = \frac{h^4}{24} \left| \sum_{n,m\geq 0: n+m=4} C_4^n \frac{\partial^4 f}{\partial x^n \partial y^m}\Big|_{(ih,jh^*)} K_{n,m}(x,y) \right| + O(h^4 \omega\left(f^{IV}, h\right)). \tag{32}$$

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $(x,y) \in \mathbb{T}^{\pm}_{0,0,0}$.

В работе [4] доказано, что для произвольного кубического полинома $P_3(x)$ имеем место равенство $\varphi_h(P_3, x) = P_3(x)$, где оператор $\varphi_h(\mathbf{f})$ определен ранее.

Отсюда и из того факта, что след полинома двух переменных на любую прямую есть полином одной переменной той же степени и из конструкции метода $g_h(f)$ следует, что если $P_3(x,y)$ кубический полином по переменным x и y, то $g_h(P_3, x, y) = P_3(x,y)$.

Таким образом для $n, m = 0, 1, \ldots, n+m \le 3$ и $(x, y) \in \mathbb{T}^{\pm}_{0,0,0}$ имеем

$$x^n y^m = g_h(x^n y^m, x, y) = \sum_{\nu,\mu:(\nu,\mu)\in\mathfrak{D}} \nu^n \left(\mu \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m G\left(\frac{x}{h} - \nu, \frac{y}{h^*} - \mu\right). \tag{33}$$

Если непустое множество $\mathfrak{R}$ лежит в круге радиуса Mh (M абсолютная константа), то для $(x, y) \in \mathfrak{R}$ формулу Тейлора для функции двух переменных f можно записать в виде

$$f(x, y) = \sum_{n,m\ge 0: n+m\le 4} C_4^{n+m} \frac{h^{n+m}}{(n+m)!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^n \partial y^m}\bigg|_{(0,0)} x^n y^m + \alpha(x, y) h^4 \omega\left(f^{IV}, hM\right),$$

где $|\alpha(x, y)| \le M^4/24$.

Отсюда, из линейности оператора g_h, соотношения (33), из того факта, что равенство (22) содержит не более чем 54 слагаемых отличных от нуля, что носитель базисной функции содержится в круге радиуса 3 и из теоремы 4 имеем

$$g_h(f, x, y) = \sum_{n,m\ge 0: n+m\le 4} C_4^{n+m} \frac{h^{n+m}}{(n+m)!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^n \partial y^m}\bigg|_{(0,0)} g_h\left(x^n y^m, x, y\right) +$$

$$+\beta(x, y) h^4 \omega\left(f^{IV}, hM\right) = \sum_{n,m\ge 0: n+m\le 3} C_4^{n+m} \frac{h^{n+m}}{(n+m)!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^n \partial y^m}\bigg|_{(0,0)} x^n y^m +$$

$$+ \sum_{n,m\ge 0: n+m=4} \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^n \partial y^m}\bigg|_{(0,0)} g_h\left(x^n y^m, x, y\right) + \beta(x, y) h^4 \omega\left(f^{IV}, 4h\right),$$

где $|\beta(x, y)| \le \|N\|_{C(\mathbb{R}^2)} 4 \cdot 4^4 \cdot 54/24$.

Отсюда и из равенства (25) следует, что

$$g_h(f, x, y) = \sum_{n,m\ge 0: n+m\le 3} C_4^{n+m} \frac{h^{n+m}}{(n+m)!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^n \partial y^m}\bigg|_{(0,0)} x^n y^m +$$

$$+ \sum_{n,m\ge 0: n+m=4} \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^n \partial y^m}\bigg|_{(0,0)} \times$$

$$\times \sum_{\nu,\mu:(\nu,\mu)\in\mathfrak{D}} \nu^n \left(\mu \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m G\left(\frac{x}{h} - \nu, \frac{y}{h^*} - \mu\right) + \beta(x, y) h^4 \omega\left(f^{IV}, 4h\right).$$

Таким образом имеем

$$|f(x, y) - g_h(f, x, y)| =$$

$$= \frac{h^4}{24} \left| \sum_{n,m\ge 0: n+m=4} C_4^n \left(x^n y^m - \sum_{\nu,\mu:(\nu,\mu)\in\mathfrak{D}} \nu^n \left(\mu \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m G\left(\frac{x}{h} - \nu, \frac{y}{h^*} - \mu\right) \right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial^4 f}{\partial x^n \partial y^m}\bigg|_{(0,0)} \right| + O(h^4 \omega\left(f^{IV}, h\right)) =$$

$$= \frac{h^4}{24} \left| \sum_{n,m\ge 0: n+m=4} C_4^n \frac{\partial^4 f}{\partial x^n \partial y^m}\bigg|_{(0,0)} K_{n,m}(x, y) \right| + O(h^4 \omega\left(f^{IV}, h\right)).$$

Соотношение (32) доказано.

Положим

$$|||f^{IV}||| = \max_{n,m\geq 0: n+m=4} \left\{ \left\| \frac{\partial^4 f}{\partial x^n \partial y^m} \right\|_{C(\mathbb{R}^2)} \right\}$$

и

$$\mathbb{K} = \max_{(x,y)\in \mathbb{T}^{\pm}_{0,0,0}} \left\{ \sum_{n,m\geq 0: n+m=4} C_4^n |K_{n,m}(x,y)| \right\}.$$

Следствие 2. *Пусть функция f такова, что*

$$\frac{\partial f^{\nu+\mu}}{\partial x^\nu \partial y^\mu} \in C(\mathbb{R}^2) \quad \nu,\mu = 0,1,\dots,4, \quad \nu+\mu \leq 4,$$

тогда

$$\|f - g_h(f)\|_{C(\mathbb{R}^2)} = \mathbb{K}\frac{h^4}{24}|||f^{IV}||| + o(h^4).$$

Авторы благодарят профессора Бабенко В.Ф. за полезные советы и обсуждение результатов данной работы.

Список литературы

[1] *Daubechies I.* Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia, 1992.
[2] *Dubuc S.* Interpolation through an Iterative Scheme. Journal of Math. An. and Appl., 1986, 185-204.
[3] *S. De Marchi* The Dyadic Iterative Interpolation Method and some extensions. TR nr. 10/94, University of Padua, 1994.
[4] *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Линейный метод восстановления функций основанный на бинарном пополнении данных. Укр. матем.ж., 2001, 53, N 11 с.1501-1512.

Лигун А.А., Шумейко А.А.

Восстановление функции по информации о ее значениях в узлах треугольной сетки, основанное на пополнении данных

В работе рассмотрен один метод бинарного пополнения двумерных данных – по информации о поверхности по треугольной решетке строится непрерывная полигональная поверхность по более густой (чем заданная) решетке.

Получена величина погрешности, норма метода и изучены его свойства.

Ligun A., Shumeiko A.

Recovery of function on information about the value in knots of a triangular grid based on supplement of datas.

In article considered one method of binary supplement of two-dimensional datas. On information about a surface on a triangular grids is created continuous Polygonal surface on more dense (than specific) grids.

Calculate the value of an error is obtained, norm the method and are investigated its property.