УДК 517.5-514.17

Об одном способе восстановления функций по средним значениям на равномерной сетке.

А.А.Лигун, А.А.Шумейко

Развитие компьютерных сетей, как локальных, так и глобальных, в частности Internet, стимулировало большой интерес к задачам кодирования и сжатия данных. Для работы с мультимедийными притожениями, в частности звуковыми данными, в качестве кодирующих функционалов часто выбирают средние значения по равномерному разбиению. В качестве восстанавливающего аппарата в последнее время часто используются методы элементарных волн (всплесков) (см. [1]), интерполяционный в среднем тригонометрический и алгебраический многочлен, обобщеных интерполяционных в среднем сплайны (см. [2]) и др.

В данной работе рассмотрен один метод, который основан на идее бинарного пополнения данных и с одной стороны примыкает к всплескам, а с другой стороны позволяет получать восстановление функции посредством линейных комбинаций базисных функций с минимальным носителем используя информацию о средних значениях.

Определения и постановка задачи. Пусть $h > 0$ и

$$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}} = \{x_{i,0}\}_{i\in\mathbb{Z}} = \{ih\}_{i\in\mathbb{Z}}$$

- равномерное разбиение оси с шагом h.

Пусть $\ell_\infty(\mathbb{R})$ - линейное пространство всех ограниченных последовательностей

$$\hat{\mathbf{f}} = \{\hat{f}_{i,0}\}_{i\in\mathbb{Z}} = \{\hat{f}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$$

с нормой

$$\|\hat{\mathbf{f}}\|_{\ell_\infty(\mathbb{R})} = \sup_{i\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_i|.$$

Пусть $\mathbb{E}$ есть или ось $\mathbb{R}$ или период $\mathbb{T}$ (в дальнейшем всегда будем считать период равным 2π) или промежуток $[a, b]$.

Через $C(\mathbb{E})$ обозначим линейное пространство всех непрерывных ограниченных на $\mathbb{E}$ функций $\hat{f}$ с нормой

$$\|\hat{f}\|_{C(\mathbb{E})} = \sup_{x\in\mathbb{E}} |f(x)|, \tag{1}$$

$L_p(\mathbb{E})$ $(p \in [1, \infty))$ – пространство всех измеримых суммируемых на $\mathbb{E}$ в p-й степени функций с нормой

$$\|f\|_{p(\mathbb{E})} = \left(\int_{\mathbb{E}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}. \tag{2}$$

Пусть задана последовательность $\hat{\mathbf{f}}$ и оператор $\mathbb{P}$- отображающий множество последовательностей $\hat{\mathbf{f}}$ в пару последовательностей $\hat{\mathbf{f}}^+ = \left\{f_i^+\right\}$ и $\hat{\mathbf{f}}^- = \left\{f_i^-\right\}$. Определим новую последовательность $\hat{\mathbf{f}}_1 = \hat{\mathbf{f}}_1(\mathbb{P}) = \left\{\hat{f}_{i,1}\right\}_{i\in\mathbb{Z}}$, где $\hat{f}_{2i,1} = \hat{f}_i^+$, $\hat{f}_{2i-1,1} = \hat{f}_i^-$, $(i \in \mathbb{Z})$

Полагая $\hat{\mathbf{f}}_k = \hat{\mathbf{f}}_k(\mathbb{P}) = \hat{\mathbf{f}}_1(\hat{\mathbf{f}}_{k-1})$, получаем метод бинарного расслоения данных.

В работе [4] рассмотрен оператор $\mathbb{P}_1$ приводящий к формулам расслоения

$$\begin{aligned} x_{2i,k} &= x_{i,k-1} + \tfrac{h}{2^{k+1}}, \quad \hat{f}_{2i,k} = \hat{f}_{i,k-1} + \frac{1}{8}\left(\hat{f}_{i+1,k-1} - \hat{f}_{i-1,k-1}\right); \\ x_{2i-1,k} &= x_{i,k-1} - \tfrac{h}{2^{k+1}}, \quad \hat{f}_{2i-1,k} = \hat{f}_{i,k-1} - \frac{1}{8}\left(\hat{f}_{i+1,k-1} - \hat{f}_{i-1,k-1}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Положим

$$\tilde{f}_{i+1/2,k} = \frac{9}{16}\left(\hat{f}_{i,k} + \hat{f}_{i+1,k}\right) - \frac{1}{16}\left(\hat{f}_{i+2,k} + \hat{f}_{i-1,k}\right) =$$

$$= \frac{\hat{f}_{i,k} + \hat{f}_{i+1,k}}{2} - \frac{1}{8}\Delta^2\left(\frac{\hat{f}_{i,k} + \hat{f}_{i+1,k}}{2}\right).$$

Каждой последовательности $\hat{\mathbf{f}}_k$ поставим в соответствие кусочно-линейную функцию

$$\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}},x)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left(\tilde{f}_{i+1/2,k}-\frac{1}{6}\Delta^2\tilde{f}_{i+1/2,k}\right)B\left(\frac{1}{h}\left(x-\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right)\right), \tag{4}$$

где $B(x)$- B-сплайн первого порядка, то есть

$$B(x)=\begin{cases}x-1, x\in[-1,0],\\ 1-x, x\in[0,1],\\ 0, x\notin[-1,1].\end{cases}$$

Отметим несколько свойств функции $\psi_{k,h}(x)$, которые будут нам необходимы в дальнейшем.

Проводя непосредственные вычисления, получаем

$$\frac{2^k}{h}\int_{x_{i,k}}^{x_{i+1,k}}\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}},x)dx=\tilde{f}_{i+1/2,k}-\frac{1}{48}\Delta^2(\tilde{f}_{i+1/2,k}+\tilde{f}_{i-1/2,k}),$$

то есть $\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}},x)$ асимптотически совпадает с ломаной интерполирующей средние значения $\tilde{f}_{i+1/2,k}$.

Положим

$$\Delta\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}},x)=\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}},x+x_{i,k})-\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}},x)$$

и

$$\Delta^k\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}},x)=\Delta\left(\Delta^{k-1}\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}},x)\right)\quad k\geq 2$$

и

$$\Delta\hat{f}_{i,k}=\hat{f}_{i+1,k}-\hat{f}_{i,k},$$
$$\Delta^k\hat{f}_{i,k}=\Delta\left(\Delta^{k-1}\hat{f}_{i,k}\right)\quad k\geq 2.$$

Лемма 1. *Для любой последовательности $\hat{\mathbf{f}}\in\ell_\infty(\mathbb{R})$ и произвольного $k\in\mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$\|\Delta^2\hat{\mathbf{f}}_{k+1}\|_{\ell_\infty(\mathbb{R})}\leq\frac{1}{2}\|\Delta^2\hat{\mathbf{f}}_k\|_{\ell_\infty(\mathbb{R})}. \tag{5}$$

Доказательство. Вначале рассмотрим величину

$$\Delta^2\hat{f}_{2i,k+1}=\Delta^2\hat{f}^+_{i,k}=\hat{f}^-_{i+1,k}-2\hat{f}^+_{i,k}\hat{f}^-_{i,k}=$$
$$=\hat{f}_{i+1,k}-\frac{1}{8}\left(\hat{f}_{i+2,k}-\hat{f}_{i,k}\right)-2\hat{f}_{i,k}-2\frac{1}{8}\left(\hat{f}_{i+1,k}-\hat{f}_{i-1,k}\right)+\hat{f}_{i,k}-\frac{1}{8}\left(\hat{f}_{i+1,k}-\hat{f}_{i-1,k}\right)=$$
$$=\frac{1}{8}\left(3\Delta^2\hat{f}_{i,k}-\Delta^2\hat{f}_{i+1,k}\right)\leq\frac{1}{2}\|\Delta^2\hat{\mathbf{f}}_k\|_{\ell_\infty(\mathbb{R})}.$$

Проводя аналогичные построения убеждаемся в том, что

$$\Delta^2\hat{f}_{2i+1,k+1}\leq\frac{1}{2}\|\Delta^2\hat{\mathbf{f}}_k\|_{\ell_\infty(\mathbb{R})}.$$

Лемма 2. *Для любой последовательности $\hat{\mathbf{f}}\in\ell_\infty(\mathbb{R})$ и произвольного $k\in\mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$\|\psi_{k+1,h}(\hat{\mathbf{f}})-\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}})\|_{\infty(\mathbb{R})}\leq\frac{23}{48}\|\Delta^2\hat{\mathbf{f}}_k\|_{\ell_\infty(\mathbb{R})}. \tag{6}$$

Доказательство. Так как функции $\psi_{k+1,h}(\hat{\mathbf{f}},x)$ и $\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}},x)$ линейные, то разница между ними достигает экстремума в узлах $x_{i,k}$ или $x_{i+1/2,k}$. Таким образом прежде всего необходимо вычислить значения $\psi_{k+1,h}(\hat{\mathbf{f}},x_{i,k})$, $\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}},x_{i,k})$ и $\psi_{k+1,h}(\hat{\mathbf{f}},x_{i+1/2,k})$, $\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}},x_{i+1/2,k})$.

Несложно убедиться в справедливости следующих соотношений.

$$\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}},x_{i+1/2,k})=\tilde{f}_{i+1/2,k}-\frac{1}{6}\Delta^2\tilde{f}_{i+1/2,k}= \tag{7}$$
$$=\frac{\hat{f}_{i,k}+\hat{f}_{i+1,k}}{2}-\frac{1}{8}\Delta^2\left(\frac{\hat{f}_{i,k}+\hat{f}_{i+1,k}}{2}\right)-$$
$$-\frac{1}{6}\Delta^2\left(\frac{\hat{f}_{i,k}+\hat{f}_{i+1,k}}{2}\right)+\frac{1}{48}\Delta^4\left(\frac{\hat{f}_{i,k}+\hat{f}_{i+1,k}}{2}\right)=$$

$$= \frac{\hat{f}_{i,k}+\hat{f}_{i+1,k}}{2} - \frac{7}{24}\Delta^2\left(\frac{\hat{f}_{i,k}+\hat{f}_{i+1,k}}{2}\right) + \frac{1}{48}\Delta^4\left(\frac{\hat{f}_{i,k}+\hat{f}_{i+1,k}}{2}\right).$$

Кроме того,

$$\psi_{k,h}\left(\hat{\mathbf{f}}, x_{i,k}\right) = \frac{\tilde{f}_{i+1/2,k}+\tilde{f}_{i-1/2,k}}{2} - \frac{1}{6}\Delta^2\left(\frac{\tilde{f}_{i+1/2,k}+\tilde{f}_{i-1/2,k}}{2}\right) = \tag{8}$$

$$= \frac{\hat{f}_{i+1,k}+2\hat{f}_{i,k}+\hat{f}_{i-1,k}}{4} - \frac{7}{24}\Delta^2\left(\frac{\hat{f}_{i+1,k}+2\hat{f}_{i,k}+\hat{f}_{i-1,k}}{4}\right) + \frac{1}{48}\Delta^4\left(\frac{\hat{f}_{i+1,k}+2\hat{f}_{i,k}+\hat{f}_{i-1,k}}{4}\right).$$

Из метода расслоения и соотношения (4), проводя простые но громоздкие преобразования, получаем

$$\psi_{k+1,h}(\hat{\mathbf{f}}, x_{i+1/2,k}) =$$

$$= \frac{\hat{f}_{i,k}+\hat{f}_{i+1,k}}{2} - \frac{5}{64}\left(\Delta^2\hat{f}_{i+1,k}+\Delta^2\hat{f}_{i,k}\right)$$

и, кроме того,

$$\psi_{k+1,h}(\hat{\mathbf{f}}, x_{i,k}) =$$

$$= \hat{f}_{i,k} + \frac{1}{128}\left(\Delta^2\hat{f}_{i+1,k} - 6\Delta^2\hat{f}_{i,k} + \Delta^2\hat{f}_{i-1,k}\right).$$

Отсюда сразу получаем

$$\left|\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}}, x_{i+1/2,k}) - \psi_{k+1,h}(\hat{\mathbf{f}}, x_{i+1/2,k})\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{64}\left(\Delta^2\hat{f}_{i+1,k}+\Delta^2\hat{f}_{i,k}\right)\right| \le \frac{1}{32}\|\Delta^2\hat{\mathbf{f}}_k\|_{\ell_\infty(\mathbb{R})}.$$

Далее,

$$\left|\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}}, x_{i,k}) - \psi_{k+1,h}(\hat{\mathbf{f}}, x_{i,k})\right| =$$

$$= \frac{1}{384}\left|\Delta^2\left(-31\hat{f}_{i+1,k}+58\hat{f}_{i,k}-31\hat{f}_{i-1,k}\right)\right| +$$

$$+ \frac{1}{96}\left|\Delta^4\left(\hat{f}_{i+1,k}+2\hat{f}_{i,k}+\hat{f}_{i-1,k}\right)\right| \le \frac{23}{48}\|\Delta^2\hat{\mathbf{f}}_k\|_{\ell_\infty(\mathbb{R})}.$$

Лемма 3. *Для любой последовательности $\hat{\mathbf{f}}\in\ell_\infty(\mathbb{R})$, и $k,m\in\mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$\left\|\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}}) - \psi_{k+m,h}(\hat{\mathbf{f}})\right\|_{C(\mathbb{R})} \le \frac{23}{48}\|\Delta^2\hat{\mathbf{f}}_k\|_{\ell_\infty(\mathbb{R})} \le \frac{23}{48}\left(\frac{1}{2}\right)^k\|\Delta^2\hat{\mathbf{f}}_0\|_{\ell_\infty(\mathbb{R})}. \tag{9}$$

Доказательство.

$$\left\|\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}}) - \psi_{k+m,h}(\hat{\mathbf{f}})\right\|_{C(\mathbb{R})} \le \sum_{i=k}^{m-1}\left|\psi_{i+1,h}(\hat{\mathbf{f}}) - \psi_{i,h}(\hat{\mathbf{f}})\right|.$$

Из леммы 2 следует

$$\left\|\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}}) - \psi_{k+m,h}(\hat{\mathbf{f}})\right\|_{C(\mathbb{R})} \le \frac{1}{16}\sum_{i=k}^{m-1}\|\Delta^2\hat{\mathbf{f}}_k\|_{\ell_\infty(\mathbb{R})} \le$$

$$\le \frac{23}{48}\left(\|\Delta^2\hat{\mathbf{f}}_k\|_{\ell_\infty(\mathbb{R})} + \|\Delta^2\hat{\mathbf{f}}_{k+1}\|_{\ell_\infty(\mathbb{R})} + \dots\right).$$

Применяя лемму (1) получаем

$$\left\|\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}}) - \psi_{k+m,h}(\hat{\mathbf{f}})\right\|_{C(\mathbb{R})} \le \frac{23}{48}\left(\|\Delta^2\hat{\mathbf{f}}_k\|_{\ell_\infty(\mathbb{R})} + \frac{1}{2}\|\Delta^2\hat{\mathbf{f}}_k\|_{\ell_\infty(\mathbb{R})} + \dots\right) =$$

$$= \frac{23}{48}\|\Delta^2\hat{\mathbf{f}}_k\|_{\ell_\infty(\mathbb{R})}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) =$$

$$= \frac{23}{48}\|\Delta^2\hat{\mathbf{f}}_k\|_{\ell_\infty(\mathbb{R})} \le \frac{23}{48}\left(\frac{1}{2}\right)^k\|\Delta^2\hat{\mathbf{f}}_0\|_{\ell_\infty(\mathbb{R})}.$$

Лемма доказана.

Из леммы 3 следует, что последовательность $\{\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}},x)\}_{k=0}^{\infty}$ сходится в себе. Нетрудно видеть, что она ограничена. Отсюда следует, что поточечный предел $\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}},x)$ при $k\to\infty$ существует. Обозначим этот предел через $\psi_h(\hat{\mathbf{f}},x)$.

Так как для любого $k\in\mathbb{N}$ оператор $\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}})$ есть линейный оператор, отображающий пространство ℓ_∞ в пространство ограниченных на всей плоскости кусочно-линейных функций, то ψ_h есть линейный оператор, отображающий пространство ℓ_∞ в пространство $C(\mathbb{R})$ (это следует из (3)).

Переходя к пределу по $m\to\infty$ в (9), немедленно получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого фиксированного $k\in\mathbb{N}$ и любой последовательности $\hat{\mathbf{f}}\in\ell_\infty$ верно неравенство*

$$\left\|\psi_h(\hat{\mathbf{f}})-\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}})\right\|_{C(\mathbb{R})}\le\frac{23}{48}\|\Delta^2\hat{\mathbf{f}}_k\|_{\ell_\infty(\mathbb{R})}\le\frac{23}{48}\left(\frac{1}{2}\right)^k\|\Delta^2\hat{\mathbf{f}}_0\|_{\ell_\infty(\mathbb{R})}.$$

Из метода построения ясно, что функция $\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}},x)$ непрерывная и кусочно-дифференцируемая. Следующая теорема утверждает, что предельная функция $\psi_h(\hat{\mathbf{f}},x)$ обладает лучшими дифференциальными свойствами – она непрерывно-дифференцируема.

Теорема 2. *Пусть $\hat{\mathbf{f}}$ произвольная последовательность из ℓ_∞, тогда $\psi_h(\hat{\mathbf{f}})\in C^1(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Если, как обычно

$$\omega(g,t)=\sup_{|\tau|\le t}\|g(\cdot+\tau)-g(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}$$

равномерный модуль непрерывности функции $g\in C(\mathbb{R})$ в точке t, то

$$\omega\left(\psi_h(\hat{\mathbf{f}}),\frac{h}{2^k}\right)=\sup_{|\tau|\le\frac{h}{2^k}}\left\|\psi_h(\hat{\mathbf{f}},\cdot+\tau)-\psi_h(\hat{\mathbf{f}},\cdot)\right\|_{C(\mathbb{R})}=$$

$$=\sup_{|\tau|\le\frac{h}{2^k}}\max_{i\in\mathbb{Z}}\max\left\{\left|\psi_h(\hat{\mathbf{f}},x_{i,k}+\tau)-\psi_h(\hat{\mathbf{f}},x_{i,k})\right|,\left|\psi_h(\hat{\mathbf{f}},x_{i+1,k})-\psi_h(\hat{\mathbf{f}},x_{i+1,k}-\tau)\right|\right\}=$$

2. Базисная функция и ее свойства. Далее нам понадобится одна функция специального вида, которая в дальнейшем будет играть роль базисной функции.

Пусть $h=1$ и последовательность $\mathbf{f}^*=\{\hat{f}^*_{0,i}\}_{i\in\mathbb{Z}}$, где $\hat{f}^*_{0,i}=\delta_{0,i}$ и $\delta_{\nu,\mu}$– символ Кронекера.

Положим

$$\Psi_k(x)=\psi_k(\mathbf{f}^*,x)\qquad\qquad \Psi(x)=\psi(\mathbf{f}^*,x).$$

Ясно, то

$$\psi_{k,h}(\mathbf{f}^*,x)=\Psi_k\left(\frac{x}{h}\right)$$

и если $\mathbf{f}^*_\mathbf{i}$ сдвиг последовательности $\mathbf{f}^*$, то

$$\psi_{k,h}(\mathbf{f}^*_\mathbf{i},x)=\Psi_k\left(\frac{x}{h}-i\right).$$

Отсюда и из линейности оператора $\psi_{k,h}$ следует

$$\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}},x)=\psi_{k,h}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}\hat{f}_{i,0}\mathbf{f}^*_\mathbf{i},x\right)=$$

$$=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\hat{f}_{i,0}\psi_{k,h}\left(\mathbf{f}^*_\mathbf{i},x\right)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\hat{f}_{i,0}\Psi_k\left(\frac{x}{h}-i\right),\tag{10}$$

следовательно, для любой последовательности $\hat{\mathbf{f}}\in\ell_\infty$, любого $x\in\mathbb{R}$ и $h>0$ имеют место равенства

$$\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}},x)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\hat{f}_{i,0}\Psi_k\left(\frac{x}{h}-i\right).\tag{11}$$

Из построения функции $\Psi_k(x)$, вытекает, что она имеет конечный носитель $[-\frac{1}{2}-\sum_{\nu=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^\nu,\frac{1}{2}+\sum_{\nu=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^\nu]$, а функция $\Psi(x)$ имеет конечный носитель $[-\frac{5}{2},\frac{5}{2}]$. Исходя из этого следует, что для $x\in[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}]$, $i\in\mathbb{Z}$

в равенствах (11) и (10) лишь пять слагаемых отличны от нуля. Таким образом для $x \in [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ выполняются равенства

$$\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}}, x) = \sum_{\nu=i-2}^{i+2} \hat{f}_\nu \Psi_k\left(\frac{x}{h} - \nu\right). \tag{12}$$

и

$$\psi_h(\hat{\mathbf{f}}, x) = \sum_{\nu=i-2}^{i+2} \hat{f}_\nu \Psi\left(\frac{x}{h} - \nu\right). \tag{13}$$

Отметим, что в силу единственности предела последовательности, базисная функция Ψ совпадает с базисной функцией полученной в работе [4].

В случае, когда задана функция $f \in C(\mathbb{R})$ и значения $\tilde{f}_{i,0}$ определены равенствами

$$\tilde{f}_{i,0} = \frac{2^k}{h} \int_{(i-1/2)h2^{-k}}^{(i+1/2)h2^{-k}} f(x)\,dx,$$

и множество этих значений обозначим через $\mathbf{f^k}$ ($\mathbf{f} = \mathbf{f^0} = \hat{\mathbf{f}}$). Кроме того, вместо $\psi_{k,h}(\hat{\mathbf{f}}, x)$ будем писать $\psi_{k,h}(f, x)$.

Из метода построения оператора ψ_h следует, что

$$\psi_{h2^{-k}}\left(\psi_{h2^{-m}}(\hat{\mathbf{f}}, \cdot), x\right) = \psi_{h2^{-k}}\left(\hat{\mathbf{f}}, x\right), \tag{14}$$

$$\psi_{h2^{-k}}\left(\hat{\mathbf{f}}^{\mathbf{k}}, x\right) = \psi_h\left(\hat{\mathbf{f}}, x\right) \tag{15}$$

и

$$\psi_{h2^{-k}}\left(\mathbf{f}^\nu, x\right) = \psi_{h2^{-k}}\left(\hat{\mathbf{f}}, x\right). \tag{16}$$

Приведем некоторые свойства метода восстановления ψ_k, полученные ранее.

Теорема 3. *Для всех $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ имеет место равенство*

$$\Psi(x) = \Psi(2x+1) + \Psi(2x-1) + \frac{1}{8}\left(\Psi(2x+3) + \Psi(2x-3)\right) - \frac{1}{8}\left(\Psi(2x+5) + \Psi(2x-5)\right). \tag{17}$$

Пусть $f \in C(\mathbb{R})$ и $\|\psi\|_{C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})}$ – норма оператора ψ, то есть

$$\|\psi_h\|_{C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})} = \sup_{\|f\|_{C(\mathbb{R})} \le 1} \|\psi(f)\|_{C(\mathbb{R})}$$

Положим

$$N(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left|\Psi\left(\frac{x}{h} - i\right)\right|$$

Теорема 4. *Для любого $h > 0$ справедливо равенство*

$$\|\psi_h\| = \|\psi_h\|_{C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})} = \|N\|_{C(\mathbb{R})}. \tag{18}$$

Подсчет на ЭВМ показал, что

$$\|\psi_h\| = \|N(x)\|_{C[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \approx 1.33333 \tag{19}$$

Положим для $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$K(x) = x^3 - \sum_{i=-2}^{2} \int_{\frac{2i-1}{2}}^{\frac{2i+1}{2}} t^3 dt\, \Psi(x-i) \tag{20}$$

Теорема 5. *Пусть функция f такова, что $f^\nu \in C(\mathbb{R})$, $\nu=0,1,...,4$, тогда для $x \in \left[(i-\frac{1}{2})h, (i+\frac{1}{2})h\right]$ равномерно по $i \in \mathbb{Z}$ выполняется соотношение*

$$f(x) - \psi_h(f, x) = \frac{h^3}{3!} f_i^{(3)} K\left(\frac{x}{h} - i\right) + O(h^4). \tag{21}$$

Передача информации о функции по ее средним значениям широко используется в практических приложениях. Прежде всего это связано с тем, что любые измерения снимают не точные, а усредненные значения. Результаты теоремы 5 говорят, что использование предложенного метода расслоения даст погрешность восстановления порядка h^3 и при этом (согласно теореме 4) ошибка измерения вырастет не более чем в $4/3$ раза.

С другой стороны, в силу локальности рассмотренного метода расслоения, можно его использовать по шагово – вначале определить значения h и те значения аргумента, при которых метод расслоения дает требуемую точность восстановления ε. Далее рассматривать лишь те участки функции, которые восстанавливаются с точностью ε при значении $h/2$ и т.д., пока не найдется последний участок, для восстановления которого требуется шаг $h2^{-m}$.

Покажем, что использование этого алгоритма дает тот же результат, что и применение метода с шагом $h2^{-m}$ ко всей функции целиком.

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ заданная погрешность восстановления и $\mathbf{f^k} - \mathbf{\hat{f}^k} = \delta^{\mathbf{k}}$, где $\delta^{\mathbf{k}} = \delta^{k,0} + \delta^{k,1}$ и

$$\delta^{k,0} = \begin{cases} \delta_{i,k}, & |\delta_{i,k}| > \varepsilon \\ 0, & |\delta_{i,k}| \le \varepsilon \end{cases}, \delta^{k,1} = \begin{cases} \delta_{i,k}, & |\delta_{i,k}| \le \varepsilon \\ 0, & |\delta_{i,k}| > \varepsilon \end{cases}.$$

Положим

$$\sigma_k(x) = f(x) - \psi_h(f,x) - \sum_{\nu=1}^{k} \psi_{h2^{-\nu}}(\delta^\nu, x).$$

Отсюда и из свойства (15) получаем

$$\sigma_k(x) = f(x) - \psi_h(f,x) - \sum_{\nu=1}^{k} \psi_{h2^{-\nu}}(\mathbf{f}^\nu - \mathbf{\hat{f}}^\nu, x) =$$

$$= f(x) - \psi_h(\mathbf{f^0}, x) - \psi_{h2^{-1}}(\mathbf{f^1}, x) + \psi_{h2^{-1}}(\mathbf{\hat{f}^1}, x) - \psi_{h2^{-2}}(\mathbf{f^2}, x) + \psi_{h2^{-2}}(\mathbf{\hat{f}^2}, x) + \ldots + \psi_{h2^{-k}}(\mathbf{\hat{f}^k}, x) =$$
$$= f(x) - \psi_h(\mathbf{f^0}, x) - \psi_{h2^{-1}}(\mathbf{f^1}, x) + \psi_h(\mathbf{\hat{f}^0}, x) - \psi_{h2^{-2}}(\mathbf{f^2}, x) + \psi_{h2^{-2}}(\mathbf{\hat{f}^2}, x) + \ldots + \psi_{h2^{-k}}(\mathbf{\hat{f}^k}, x) =$$
$$= f(x) - \psi_{h2^{-k}}(\mathbf{f}, x).$$

С другой стороны,

$$\sigma_k(x) = f(x) - \psi_h(f,x) - \sum_{\nu=1}^{k} \psi_{h2^{-\nu}}(\delta^{k,0} + \delta^{k,1}, x) =$$

$$= f(x) - \psi_h(f,x) - \sum_{\nu=1}^{k} \psi_{h2^{-\nu}}(\delta^{k,0}) - \sum_{\nu=1}^{k} \psi_{h2^{-\nu}}(\delta^{k,1}, x).$$

Следовательно, отсюда имеем

$$f(x) - \psi_h(f,x) - \sum_{\nu=1}^{k} \psi_{h2^{-\nu}}(\delta^{k,0}) = f(x) - \psi_{h2^{-k}}(\mathbf{f}, x) + \sum_{\nu=1}^{k} \psi_{h2^{-\nu}}(\delta^{k,1}, x).$$

Отсюда и из теоремы 4 сразу получаем

$$\left| f(x) - \psi_h(f,x) - \sum_{\nu=1}^{k} \psi_{h2^{-\nu}}(\delta^{k,0}) \right| \le |f(x) - \psi_{h2^{-k}}(\mathbf{f}, x)| + k\|N\|_{C[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}\varepsilon.$$

Таким образом вместе с (19) имеем

$$\left| f(x) - \psi_h(f,x) - \sum_{\nu=1}^{k} \psi_{h2^{-\nu}}(\delta^{k,0}) \right| \le |f(x) - \psi_{h2^{-k}}(\mathbf{f}, x)| + \frac{4}{3}k\varepsilon.$$

Список литературы

[1] *Holschneider M.* Wavelets. An analysis Tool. Oxfodr. Oxford University Press, 1995.

[2] *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Асимптотические методы восстановления кривых. Киев, Изд. Института математики НАН Украины, 1997.

[3] *Dubuc S.* Interpolation through an Iterative Scheme. Journal of Math. An. and Appl., 1986, 185-204.

[4] *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Исследования линейных операторов порожденных методами пополнения данных. Математичне моделювання, Днепродзержинск, ДГТУ,2000.