Вісник Дніпропетровського університету, Математика, випуск 5, 2000, с. 95-103.

Линейный метод уточненного восстановления функций основанный на бинарном пополнении данных.

А.А.Лигун, А.А.Шумейко

1. Определения и постановка задачи. Одной из классических задач теории аппроксимации функций является восстановление функций по ее значениям в равноотстоящих узлах. Известно большое число методов восстановления функции по ее значениям в равноотстоящих узлах. Это интерполяционные тригонометрические полиномы и периодические сплайны для случая периодических функций, для функций заданных на отрезке это классические интерполяционные полиномы или интерполяционные сплайны, сплайны асимптотически совпадающие с интерполяционными и т.д. (см. [1]).

В последнее время широкое распространение получили методы, основанные на вычислительном аспекте, такие как wavelets (см. [2]) или бинарное пополнение (см. [3], [4]).

Одному из методов восстановления функций, основанному на бинарном пополнении данных и посвящена эта работа.

Введем обозначения, необходимые нам в дальнейшем. Пусть $h > 0$ и

$$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}} = \{x_{i,0}\}_{i\in\mathbb{Z}} = \{ih\}_{i\in\mathbb{Z}}$$

– равномерное разбиение оси с шагом h.

Пусть $\ell_\infty(\mathbb{R})$– линейное пространство всех ограниченных последовательностей

$$\mathbf{f} = \{f_{i,0}\}_{i\in\mathbb{Z}} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$$

с нормой

$$\|\mathbf{f}\|_{\ell_\infty(\mathbb{R})} = \sup_{i\in\mathbb{Z}} |f_i|.$$

Пусть $\mathbb{E}$ есть или ось $\mathbb{R}$ или период $\mathbb{T}$ (в дальнейшем всегда будем считать период равным 2π) или промежуток $[a,b]$.

Через $C(\mathbb{E})$ обозначим линейное пространство всех непрерывных ограниченных на $\mathbb{E}$ функций f с нормой

$$\|f\|_{C(\mathbb{E})} = \sup_{x\in\mathbb{E}} |f(x)|, \tag{1}$$

$L_p(\mathbb{E})$ $(p \in [1,\infty))$ – пространство всех измеримых суммируемых на $\mathbb{E}$ в p-й степени функций с нормой

$$\|f\|_{p(\mathbb{E})} = \left(\int_{\mathbb{E}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}. \tag{2}$$

Рассмотрим один метод пополнения данных. Через каждые шесть точек (x_ν, f_ν) $(\nu = i-3, i-2, i, i+1, i+3, i+4;\ i \in \mathbb{Z})$ проведем интерполяционный полином Бесселя пятого порядка и вычислим его значение в точке $x_{i+1/2} = x_i + h/2$. Это приводит к формуле

$$\hat{f}_{i+1/2,0} = \frac{3}{256}\left(f_{i-2,0} + f_{i+3,0}\right) -$$

$$-\frac{25}{256}\left(f_{i-1,0} + f_{i+2,0}\right) + \frac{75}{128}\left(f_{i,0} + f_{i+1,0}\right) =$$

$$= \frac{f_{i+1,0}+f_{i,0}}{2} - \frac{1}{8}\Delta^2\left(\frac{f_{i+1,0}+f_{i,0}}{2}\right) + \frac{3}{128}\Delta^4\left(\frac{f_{i+1,0}+f_{i,0}}{2}\right), \tag{3}$$

где $\Delta^2 z_i$ вторая, а $\Delta^4 z_i$ четвертая центральная разность z_i.

Положим

$$x_{2i,1} = x_{i,0}, \quad f_{2i,1} = f_{i,0} \qquad (i \in \mathbb{Z}), \tag{4}$$

$$x_{2i+1,1} = \frac{x_{i,0}+x_{i+1,0}}{2}, \quad f_{2i+1,1} = \hat{f}_{i+1/2,0} \qquad (i \in \mathbb{Z}). \tag{5}$$

Таким образом мы получим значения функции $f_{i,1}$ в точках $x_{i,1}$ ($i =\in \mathbb{Z}$).

Полученный набор будем использовать в качестве исходного и повторяем процедуру пополнения данных, что приводит к реккурентным формулам

$$x_{2i,k} = x_{i,k-1}, \quad f_{2i,k} = f_{i,k-1} \qquad (i \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}), \tag{6}$$

и

$$x_{2i+1,k} = \frac{x_{i,k-1}+x_{i+1,k-1}}{2}, \tag{7}$$

$$f_{2i+1,k} = \frac{f_{i+1,k-1}+f_{i,k-1}}{2} - \frac{1}{8}\Delta^2\left(\frac{f_{i+1,k-1}+f_{i,k-1}}{2}\right) + \frac{3}{128}\Delta^4\left(\frac{f_{i+1,k-1}+f_{i,k-1}}{2}\right),$$
$$i \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}.$$

Метод, основанный на пополнении по четырем точкам рассматривался в работах [3], [4].

Для каждого фиксированного k построим ломаную $g_{k,h}(\mathbf{f}, x)$, принимающую значения $f_{i,k}$ в узлах $x_{i,k}$.

Равномерный предел при $k \to \infty$ последовательности ломаных $\{g_{k,h}(\mathbf{f}, x)\}_{k=1}^{\infty}$ существует. Обозначим его через $g_h(\mathbf{f}, x)$. Доказательство существования и единственности этого предела приведено ниже. Более того, получена оценка скорости сходимости $\{g_{k,h}(\mathbf{f}, x)\}_{k=1}^{\infty}$ к нему.

Рассмотрим другой подход, приводящий к этой же задаче бинарного пополнения.

Для последовательности $\mathbf{f}$ будем искать восстановление f в точке $x_{i+1/2} = x_i + h/2$ в виде линейной комбинации

$$\hat{f}_{i+1/2,0} = f_{i+1/2} \approx \alpha_i f_{i-2,0} + \beta_i f_{i-1,0} + \gamma_i f_{i,0} + \delta_i f_{i+1,0} + \varepsilon_i f_{i+2,0} + \xi_i f_{i+3,0}, \tag{8}$$

где коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \varepsilon_i, \xi_i$ выберем из условия наивысшей алгебраической точности. То есть так, чтобы соотношение (8) обращалось в равенство для функций $f(x) = 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$. Это приводит к системе шести линейных уравнений с шестью неизвестными

$$\begin{cases} \alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \delta_i + \varepsilon_i + \xi_i = 1, \\ \alpha_i(i-2) + \beta_i(i-1) + \gamma_i i + \delta_i(i+1) + \varepsilon_i(i+1) + \xi_i(i+2) = i + 0.5, \\ \alpha_i(i-2)^2 + \beta_i(i-1)^2 + \gamma_i i^2 + \delta_i(i+1)^2 + \varepsilon_i(i+1)^2 + \xi_i(i+2)^2 = (i+0.5)^2, \\ \alpha_i(i-2)^3 + \beta_i(i-1)^3 + \gamma_i i^3 + \delta_i(i+1)^3 + \varepsilon_i(i+1)^3 + \xi_i(i+2)^3 = (i+0.5)^3, \\ \alpha_i(i-2)^4 + \beta_i(i-1)^4 + \gamma_i i^4 + \delta_i(i+1)^4 + \varepsilon_i(i+1)^4 + \xi_i(i+2)^4 = (i+0.5)^4, \\ \alpha_i(i-2)^5 + \beta_i(i-1)^5 + \gamma_i i^5 + \delta_i(i+1)^5 + \varepsilon_i(i+1)^5 + \xi_i(i+2)^5 = (i+0.5)^5. \end{cases}$$

Решением этой системы будут числа

$$\alpha_i = \xi_i = \frac{3}{256}, \quad \beta_i = \varepsilon_i = -\frac{25}{256}, \quad \gamma_i = \delta_i = \frac{75}{128}. \tag{9}$$

Следовательно, этот метод приводит к формулам пополнения (6) – (7).

Рассмотрим еще один подход к задаче пополнения данных. Будем считать, что $f_i = f(ih)$ и $f^{(\nu)} \in C(\mathbb{R})$ $\nu = 0, \ldots, 4$. Снова пополнение будем искать в виде линейной комбинации (8), но коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \varepsilon_i, \xi_i$ выберем из следующего условия: главный член асимптотики разности левой и правой частей (8) должен иметь как можно более высокий порядок точности. Используя формулу Тейлора, получаем

$$\hat{f}_{i+1/2,0} - f_{i+1/2} = (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \delta_i + \varepsilon_i + \xi_i - 1) f_{i+1/2} +$$

$$+ f'_{i+1/2} \frac{h}{2} (-5\alpha_i - 3\beta_i - \gamma_i + \delta_i + 3\varepsilon_i + 5\xi_i) +$$

$$+ \frac{1}{2!} f''_{i+1/2} \left(\frac{h}{2}\right)^2 (25\alpha_i + 9\beta_i + \gamma_i + \delta_i + 9\varepsilon_i + 25\xi_i) +$$

$$+ \frac{1}{3!} f'''_{i+1/2} \left(\frac{h}{2}\right)^3 (-125\alpha_i - 27\beta_i - \gamma_i + \delta_i + 27\varepsilon_i + 125\xi_i) +$$

$$+ \frac{1}{4!} f^{(4)}_{i+1/2} \left(\frac{h}{2}\right)^4 (625\alpha_i + 81\beta_i + \gamma_i + \delta_i + 81\varepsilon_i + 625\xi_i) +$$

$$+ \frac{1}{5!} f^{(5)}_{i+1/2} \left(\frac{h}{2}\right)^5 (-3125\alpha_i - 243\beta_i - \gamma_i + \delta_i + 243\varepsilon_i + 3125\xi_i) + O(h^6).$$

Выполнение условия, что главный член асимптотики разности левой и правой частей (8) должен иметь как можно более высокий порядок точности, эквивалентно тому, что что коэффициенты при h^ν $(\nu = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ должны обратиться в ноль. Это условие приводит к системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \delta_i + \varepsilon_i + \xi_i = 1, \\ -5\alpha_i - 3\beta_i - \gamma_i + \delta_i + 3\varepsilon_i + 5\xi_i = 0, \\ 25\alpha_i + 9\beta_i + \gamma_i + \delta_i + 9\varepsilon_i + 25\xi_i = 0, \\ -125\alpha_i - 27\beta_i - \gamma_i + \delta_i + 27\varepsilon_i + 125\xi_i = 0, \\ 625\alpha_i + 81\beta_i + \gamma_i + \delta_i + 81\varepsilon_i + 625\xi_i = 0, \\ -3125\alpha_i - 243\beta_i - \gamma_i + \delta_i + 243\varepsilon_i + 3125\xi_i = 0. \end{cases}$$

Решениями этой системы являются числа (9). Таким образом мы снова пришли к формулам пополнения (6) – (7).

2. Базисная функция и ее свойства. Далее нам понадобится одна функция специального вида, которая в дальнейшем будет играть роль базисной функции, являющейся аналогом B-сплайнов и фундаментальных сплайнов в теории сплайн-аппроксимации.

Пусть $h = 1$ и последовательность $\mathbf{f}^* = \{f^*_{0,i}\}_{i \in \mathbb{Z}}$, где $f^*_{0,i} = \delta_{0,i}$, где

$$\delta_{\nu,\mu} = \begin{cases} 1, \nu = \mu \\ 0, \nu \neq \mu \end{cases}$$

– символ Кронекера.

Положим

$$G_k(x) = g_{k,1}(\mathbf{f}^*, x)$$

и

$$G(x) = g_1(\mathbf{f}^*, x).$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ оператор $g_{k,h}(f)$ есть линейный оператор, отображающий пространство $\ell_\infty(\mathbb{R})$ в пространство ограниченных на всей оси ломаных с узлами в точках $x_{i,k}$, а $g_h(f)$ есть линейный оператор, отображающий пространство $\ell_\infty(\mathbb{R})$ в пространство $C(\mathbb{R})$. Кроме того

$$g_{k,h/2}(\mathbf{f}, x) = g_{k,h}(\mathbf{f}, 2x).$$

Поэтому для любой последовательности $\mathbf{f}\in \ell_\infty(\mathbb{R})$, любого $x \in \mathbb{R}$ и $h > 0$ имеют место равенства

$$g_h(f, x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i G\left(\frac{x}{h} - i\right) \tag{10}$$

и

$$g_{k,h}(f, x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i G_k\left(\frac{x}{h} - i\right). \tag{11}$$

Из построения функции $G_k(x)$ $(k \geq 2)$, вытекает, что она имеет конечный носитель $[-5+\frac{1}{2^{k-2}}, 5-\frac{1}{2^{k-2}}]$, а функция $G(x)$ имеет конечный носитель $[-5, 5]$. Отсюда следует, что для $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i \in \mathbb{Z}$ в равенствах (10) и (11) лишь десять слагаемых отличны от нуля. Таким образом для $x \in [x_i, x_{i+1}]$ выполняются равенства

$$g_h(f, x) = \sum_{\nu=i-4}^{i+5} f_\nu G\left(\frac{x}{h} - \nu\right) \tag{12}$$

и

$$g_{k,h}(f, x) = \sum_{\nu=i-4}^{i+5} f_\nu G_k\left(\frac{x}{h} - \nu\right). \tag{13}$$

Отметим, что для любого $k \in \mathbb{N}$ функции $G_k(x)$ четные, следовательно, и функция $G(x)$ четная.

Теорема 1. *Для $x \in [0, 1]$ и $\nu = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ справедливы равенства*

$$x^\nu = \sum_{i=-4}^{5} i^\nu G(x - i).$$

Доказательство. Пусть $h = 1$ и $\tilde{\mathbf{f}}_0 = \{\tilde{f}_{i,0}\}_{i\in\mathbb{Z}}$, где $\tilde{f}_{i,0} = 1$, $i \in \mathbb{Z}$. Ясно, что в этом случае

$$g_h(\tilde{\mathbf{f}}_0, x) = 1.$$

С другой стороны, как следует из (12), для $x \in [0, 1]$

$$g_h(\tilde{\mathbf{f}}_0, x) = \sum_{i=-4}^{5} G(x - i).$$

Теорема 1 для $\nu = 0$ доказана.

Пусть, теперь, $\nu = 1, 2, 3, 4, 5$ и $\tilde{\mathbf{f}}_\nu = \{\tilde{f}_{i,\nu}\}_{i\in\mathbb{Z}}$, где $\tilde{f}_{i,\nu} = i^\nu$, $i = -4, \ldots, 5$ и $\tilde{f}_{i,\nu} = 0$, $i \in \mathbb{Z}\setminus\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Тогда в силу построения метода g, для $x \in [0, 1]$ выполняется равенство

$$g_h(\tilde{\mathbf{f}}_\nu, x) = x^\nu.$$

Замечая, что из (12) следует равенство

$$g_h(\tilde{\mathbf{f}}_\nu, x) = \sum_{i=-4}^{5} i^\nu G(x-i),$$

сразу получаем доказательство теоремы.

Если $f \in C(\mathbb{R}^2)$, то положим

$$g_{k,h}(f) = g_{k,h}(\mathbf{f}, x),$$

где

$$\mathbf{f} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}} = \{f(ih)\}_{i\in\mathbb{Z}}.$$

Каждой ломаной $g_{k,h}(\mathbf{f}, x)$ поставим в соответствие последовательность его значений $\mathbf{f}_k$ в узлах решетки.

Замечание 1. *Для любых $k, \nu = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место равенство*

$$g_{k,h2^{-\nu}}(\mathbf{f}_\nu, x) = g_{k,h2^{-\nu}}(g_{\nu,h}(\mathbf{f}).x) = g_{k+\nu,h}(\mathbf{f}, x). \tag{14}$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$g_{h2^{-\nu}}(\mathbf{f}_\nu, x) = g_h(\mathbf{f}, x).$$

Кроме того, имеет место равенство

$$g_{k,h}(\mathbf{f}_\nu, x_{\nu,k}) = f_{\nu,k}$$

и

$$g_{k,h}(\mathbf{f}_\nu, x_{\nu,0}) = f_{\nu,0},$$

следовательно,

$$g_h(\mathbf{f}, x) = g_h(g_h(\mathbf{f}), x),$$

то есть оператор g является ретрактом.

Из того факта, что

$$G\left(\frac{1}{2}\right) = G\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{75}{128}$$

и

$$G\left(\frac{3}{2}\right) = G\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{25}{256},$$

$$G\left(\frac{5}{2}\right) = G\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{256},$$

учитывая (14), сразу получаем

Теорема 2. *Для всех $x \in [0, 1]$ имеет место равенство*

$$G(x) = G(2x) + \frac{75}{128}G(2x+1) + \frac{9}{16}G(2x-1) - \frac{25}{256}G(2x+3) - \frac{25}{256}G(2x-3) +$$

$$+\frac{3}{256}G(2x-5) + \frac{3}{256}G(2x+5).$$

Это равенство в какой-то мере объясняет фрактальный характер функции $G(x)$.

3. О норме оператора $g_h(f)$**.** В этом разделе мы рассмотрим некоторые взаимосвязи методов восстановления $g_{k,h}(\mathbf{f})$ и $g_h(\mathbf{f})$, позволяющие оценить норму оператора g через норму $g_{k,h}$ и их разности.

Пусть

$$\Delta g_{k,h}(\mathbf{f},x) = g_{k,h}(\mathbf{f},x+x_{i,k}) - g_{k,h}(\mathbf{f},x) = g_{k,h}\left(\mathbf{f},x+\frac{h}{2^k}\right) - g_{k,h}(\mathbf{f},x),$$

$$\Delta^k g_{k,h}(\mathbf{f},x) = \Delta\left(\Delta^{k-1} g_{k,h}(\mathbf{f},x)\right) \quad k \geq 2.$$

Лемма 1. *Для любой последовательности* $\mathbf{f}\in\ell_\infty(\mathbb{R})$ *и* $k\in\mathbb{N}$ *имеют место неравенства*

$$\|\Delta g_{k+1,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})} \leq \frac{23}{32}\|\Delta g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}, \tag{15}$$

$$\|\Delta^2 g_{k+1,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})} \leq \frac{7}{16}\|\Delta^2 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}, \tag{16}$$

$$\|\Delta^3 g_{k+1,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})} \leq \frac{5}{16}\|\Delta^3 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}, \tag{17}$$

$$\|\Delta^4 g_{k+1,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{4}\|\Delta^4 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}. \tag{18}$$

Доказательство. Так как $\Delta g_{k+1,h}(\mathbf{f},x)$ есть ломаная с узлами в точках $x_{\nu,k+1}$, принимающая значения $f_{\nu,k+1}$ в узлах, то для доказательства (15) достаточно показать, что для любого $\nu\in\mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$|\Delta g_{k+1,h}(\mathbf{f},x_{\nu,k+1})| \leq \frac{23}{32}\|\Delta g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Пусть, вначале, $\nu = 2\mu+1$, тогда

$$|\Delta g_{k+1,h}(\mathbf{f},x_{2\mu+1,k+1})| = |g_{k+1,h}(\mathbf{f},x_{2\mu+2,k+1}) - g_{k+1,h}(\mathbf{f},x_{2\mu+1,k+1})| \leq$$

$$\leq \frac{1}{16}\left|g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+2,k}) - 9g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k}) + 7g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu-1,k})\right| +$$

$$+\frac{3}{128}\left|\Delta^4\left(\frac{1}{2}\left(g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k})\right)\right)\right| \leq$$

$$\leq \frac{5}{8}\|\Delta g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})} + \frac{3}{128}\|\Delta^4 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})} \leq \frac{23}{32}\|\Delta g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Для $\nu = 2\mu$ доказательство неравенства (15) проводится аналогично.

Докажем неравенство (16). Как и ранее, пусть, вначале, $\nu = 2\mu+1$, тогда

$$\Delta^2 g_{k+1,h}(\mathbf{f},x_{2\mu+1,k+1}) =$$

$$= g_{k+1,h}(\mathbf{f},x_{2\mu,k+1}) - 2g_{k+1,h}(\mathbf{f},x_{2\mu+1,k+1}) + g_{k+1,h}(\mathbf{f},x_{2\mu+2,k+1}) =$$

$$= g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k}) - 2\left(\frac{g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k})}{2} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{8}\Delta^2\left(\frac{g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k})}{2}\right) + \frac{3}{128}\Delta^4\left(\frac{g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k})}{2}\right)\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{4}\|\Delta^2 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})} + \frac{3}{64}\|\Delta^4 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})} \leq \frac{7}{16}\|\Delta^2 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Пусть, теперь, $\nu = 2\mu$, тогда

$$\Delta^2 g_{k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu,k+1}) =$$
$$= g_{k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu-1,k+1}) - 2g_{k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu,k+1}) + g_{k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu+1,k+1}) =$$
$$= \frac{g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu-1,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu,k})}{2} - 2g_{k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu,k+1}) + \frac{g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu+1,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu,k})}{2} -$$
$$- \frac{1}{16}\Delta^2 \left(g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu-1,k}) + 2g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu-1,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu+1,k})\right) +$$
$$+ \frac{3}{256}\Delta^4 \left(g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu-1,k}) + 2g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu-1,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu+1,k})\right) =$$
$$= - \frac{1}{16}\Delta^2 \left(g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu-1,k}) - 6g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu-1,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu+1,k})\right) +$$
$$+ \frac{3}{256}\Delta^4 \left(g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu-1,k}) + 2g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu-1,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu+1,k})\right) \le$$
$$\le \frac{1}{4}\|\Delta^2 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})} + \frac{3}{64}\|\Delta^4 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})} \le \frac{7}{16}\|\Delta^2 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Перейдем к доказательству неравенства (17).

$$\Delta^3 g_{k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu,k+1}) =$$
$$= g_{k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu-2,k+1}) - 3g_{k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu-1,k+1}) +$$
$$+ 3g_{k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu,k+1}) - g_{k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu+1,k+1}) =$$
$$= g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu-1,k}) - 3\frac{g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu-1,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu,k})}{2} +$$
$$+ 3g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu,k+1}) - \frac{g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu+1,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu,k})}{2} +$$
$$+ \frac{1}{16}\Delta^2 \left(3g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu-1,k}) + 3g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu+1,k})\right) -$$
$$- \frac{1}{256}\Delta^4 \left(3g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu-1,k}) + 3g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu+1,k})\right) =$$
$$= \frac{1}{16}\Delta^2 \left(3g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu-1,k}) - 4g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu+1,k})\right) -$$
$$- \frac{1}{256}\Delta^4 \left(3g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu-1,k}) + 4g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu+1,k})\right) \le$$
$$\le \frac{1}{4}\|\Delta^3 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})} + \frac{1}{32}\|\Delta^4 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})} \le \frac{5}{16}\|\Delta^3 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Наконец, докажем неравенство (18).

$$\Delta^4 g_{k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu+1,k+1}) =$$
$$= g_{k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu-1,k+1}) - 4g_{k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu,k+1}) + 6g_{k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu+1,k+1}) -$$
$$- 4g_{k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu+2,k+1}) + g_{k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\mu+3,k+1}) =$$
$$= \frac{g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu-1,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu,k})}{2} -$$
$$- \frac{1}{8}\Delta^2 \left(\frac{g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu-1,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu,k})}{2}\right) + \frac{3}{128}\Delta^4 \left(\frac{g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu-1,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu,k})}{2}\right) -$$
$$- 4g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu,k}) + 6\frac{g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu+1,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu,k})}{2} -$$
$$- 6\frac{1}{8}\Delta^2 \left(\frac{g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu+1,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu,k})}{2}\right) + 6\frac{3}{128}\Delta^4 \left(\frac{g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu+1,k}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{\mu,k})}{2}\right) -$$

$$-4g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k})+4\frac{g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k})+g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+2,k})}{2}-$$
$$-\frac{1}{8}\Delta^2\left(\frac{g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k})+g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+2,k})}{2}\right)+\frac{3}{128}\Delta^4\left(\frac{g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k})+g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+2,k})}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu-1,k})-g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k})-g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k})+g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+2,k})\right)-$$
$$-\frac{1}{16}\Delta^2\left(g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu-1,k})+7g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k})+7g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k})+g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+2,k})\right)+$$
$$+\frac{3}{256}\Delta^4\left(g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu-1,k})+7g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k})+7g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k})+g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+2,k})\right)=$$
$$=\frac{1}{16}\left(g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu-2,k})-3g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu-1,k})+2g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k})+\right.$$
$$\left.+2g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k})-3g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+2,k})+g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+3,k})\right)+$$
$$+\frac{3}{256}\Delta^4\left(g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu-1,k})+7g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k})+7g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k})+g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+2,k})\right)=$$
$$=\frac{1}{256}\Delta^4\left(3g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu-1,k})+5g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k})+5g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k})+3g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+2,k})\right)\le$$
$$\le\frac{1}{16}\|\Delta^4 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Наконец,

$$\Delta^4 g_{k+1,h}(\mathbf{f},x_{2\mu,k+1})=$$
$$=g_{k+1,h}(\mathbf{f},x_{2\mu-2,k+1})-4g_{k+1,h}(\mathbf{f},x_{2\mu-1,k+1})+6g_{k+1,h}(\mathbf{f},x_{2\mu,k+1})-$$
$$-4g_{k+1,h}(\mathbf{f},x_{2\mu+1,k+1})+g_{k+1,h}(\mathbf{f},x_{2\mu+2,k+1})=$$
$$=g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu-1,k})-4\frac{g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu-1,k})+g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k})}{2}+$$
$$+4\frac{1}{8}\Delta^2\left(\frac{g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu-1,k})+g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k})}{2}\right)-4\frac{3}{128}\Delta^4\left(\frac{g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu-1,k})+6g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k})}{2}\right)+$$
$$+6g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k})-4\frac{g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k})+g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k})}{2}+$$
$$+4\frac{1}{8}\Delta^2\left(\frac{g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k})+g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k})}{2}\right)-4\frac{3}{128}\Delta^4\left(\frac{g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k})+g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k})}{2}\right)+$$
$$+g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k})=$$
$$=-g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu-1,k})+2g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k}-g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k})+$$
$$+\frac{1}{4}\Delta^2\left(g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu-1,k})+2g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k})+g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k})\right)-$$
$$-\frac{1}{64}\Delta^4\left(g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu-1,k})+2g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k})+g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k})\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\Delta^2\left(g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu-1,k})-2g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k})+g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k})\right)-$$
$$-\frac{1}{64}\Delta^4\left(g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu-1,k})+2g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k})+g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k})\right)=$$
$$=-\frac{1}{64}\Delta^4\left(g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu-1,k})-14g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu,k})+g_{k,h}(\mathbf{f},x_{\mu+1,k})\right)\le$$
$$\le\frac{1}{4}\|\Delta^4 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})},$$

что и доказывает утверждение леммы.

Лемма 2. *Для любой последовательности* $\mathbf{f} \in \ell_\infty(\mathbb{R})$ *и произвольных фиксированных* $k, \mu \in \mathbb{N}$ *имеет место неравенство*

$$\|g_{k+\mu}(\mathbf{f}) - g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})} < \frac{49}{288}\|\Delta^2 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть, вначале, $\mu = 1$. По построению, $g_{k+1,h}(\mathbf{f}, x)$ есть ломаная с узлами в точках $x_{\nu,k+1}$, принимающая значения $f_{\nu,k+1}$ в узлах, а $g_{k,h}(\mathbf{f}, x)$ есть ломаная с узлами в точках $x_{\nu,k}$ с значениями в узлах, равными $f_{\nu,k}$. Отсюда и из того факта, что $f_{2\nu,k+1} = f_{\nu,k}$, сразу следует что разность $g_{k+1,h}(\mathbf{f}, x) - g_{k,h}(\mathbf{f}, x)$ есть ломаная с узлами в точках $x_{\nu,k+1}$, обращающаяся в ноль в точках $x_{\nu,k} = x_{2\nu,k+1}$. Таким образом для доказательства неравенства (19) при $\mu = 1$ достаточно показать, что для всех $\nu \in \mathbb{Z}$

$$|g_{k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+1,k+1}) - g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+1,k+1})| \le \frac{49}{288}\|\Delta^2 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} g_{k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+1,k+1}) = \frac{g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+2,k+1}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu,k+1})}{2} - \\ -\frac{1}{8}\Delta^2\left(\frac{g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+2,k+1}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu,k+1})}{2}\right) + \\ +\frac{3}{128}\Delta^4\left(\frac{g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+2,k+1}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu,k+1})}{2}\right). \end{aligned}$$

С другой стороны, так как для $x \in [x_{2\nu,k+1}, x_{2\nu+2,k+1}]$ функция $g_{k,h}$ является отрезком прямой, то

$$g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+1,k+1}) = \frac{g_{k,h}\left(\mathbf{f}, x_{2\nu+2,k+1}\right) + g_{k,h}\left(\mathbf{f}, x_{2\nu,k+1}\right)}{2}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} g_{k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+1,k+1}) - g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+1,k+1}) = \\ = -\frac{1}{8}\Delta^2\left(\frac{g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+2,k+1}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu,k+1})}{2}\right) + \\ +\frac{3}{128}\Delta^4\left(\frac{g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+2,k+1}) + g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu,k+1})}{2}\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |g_{k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+1,k+1}) - g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+1,k+1})| \le \\ \le \frac{1}{8}\|\Delta^2 g_{k+1,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})} + \frac{3}{128}\|\Delta^4 g_{k+1,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})} \le \frac{7}{32}\|\Delta^2 g_{k+1,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 1 сразу получаем

$$|g_{k+1,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+1,k+1}) - g_{k,h}(\mathbf{f}, x_{2\nu+1,k+1})| \le \frac{49}{512}\|\Delta^2 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})},$$

что и доказывает (19) при $\mu = 1$.

Пусть, теперь, $\mu > 1$, тогда

$$\begin{aligned} \|g_{k+\mu}(\mathbf{f}) - g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})} \le \|g_{k+1,h}(\mathbf{f}) - g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})} + \\ +\|g_{k+2}(\mathbf{f}) - g_{k+1,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})} + \ldots \|g_{k+\mu}(\mathbf{f}) - g_{k+\mu-1}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})} \le \\ \le \frac{49}{512}\|\Delta^2 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})} + \frac{49}{512}\|\Delta^2 g_{k+1,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})} + \ldots + \frac{49}{512}\|\Delta^2 g_{k+\mu-1}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})} \le \end{aligned}$$

$$\leq \frac{49}{512}\|\Delta^2 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}+\frac{49}{512}\frac{7}{16}\|\Delta^2 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}+\ldots+\frac{49}{512}\left(\frac{7}{16}\right)^{\mu-1}\|\Delta g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}=$$

$$=\frac{49}{512}\|\Delta g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}\left(1+\frac{7}{16}+\left(\frac{7}{16}\right)^2+\ldots+\left(\frac{7}{16}\right)^{\mu-1}\right)<$$

$$<\frac{49}{512}\cdot\frac{16}{9}\|\Delta g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}=\frac{49}{288}\|\Delta^2 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Лемма доказана.

Переходя к пределу по $\mu\to\infty$ из леммы 2 немедленно получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Для любой последовательности $\mathbf{f}\in\ell_\infty(\mathbb{R})$ и $k\in\mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$\|g_h(\mathbf{f})-g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}\leq\frac{49}{288}\|\Delta^2 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Теорема 3 доказывает существование функции $g_h(\mathbf{f},x)$ (как предела $g_{k,h}(\mathbf{f},x)$), и вместе с леммой 1 позволяет оценить скорость равномерной сходимости $g_{k,h}(\mathbf{f})$ к $g_h(\mathbf{f})$.

Теорема 4. *Пусть $p\in[1,\infty)$, числа $k\in\mathbb{N}$ и $a<b$. Для любой последовательности $\mathbf{f}\in\ell_\infty(\mathbb{R})$ имеют место неравенства*

$$\big|\|g_h(\mathbf{f})\|_{p[a,b]}-\|g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{p[a,b]}\big|\leq(b-a)^{1/p}\frac{49}{288}\|\Delta^2 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}\tag{21}$$

и

$$\|g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C[a,b]}\leq\|g_h(\mathbf{f})\|_{C[a,b]}\leq\|g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C[a,b]}+\frac{49}{288}\|\Delta^2 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}.\tag{22}$$

Соотношение (22) верно и для случая, когда $a=-\infty$ и $b=\infty$.

Доказательство. Действительно, из теоремы 3 сразу следует, что для всех $x\in\mathbb{R}$

$$|g_{k,h}(\mathbf{f},x)|-\frac{49}{288}\|\Delta^2 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}\leq|g_h(\mathbf{f},x)|\leq|g_{k,h}(\mathbf{f},x)|+\frac{49}{288}\|\Delta^2 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}.\tag{23}$$

Отсюда и из очевидных неравенств (следствия неравенства треугольника) верных для любых $p\in[1,\infty)$ и $g,c\in L_{p[0,1]}$

$$\|g_h\|_{p[0,1]}-\|c\|_{p[0,1]}\leq\|g-c\|_{p[0,1]}$$

и

$$\|g-c\|_{p[0,1]}\leq\|g_h\|_{p[0,1]}+\|c\|_{p[0,1]},$$

сразу получаем для $p\in[1,\infty)$ следующие неравенства

$$\|g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{p\,[a,b]}-(b-a)^{1/p}\frac{49}{288}\|\Delta^2 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})}\leq\|g_h(\mathbf{f})\|_{p\,[a,b]}\leq$$

$$\leq\|g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{p\,[a,b]}+(b-a)^{1/p}\frac{49}{288}\|\Delta^2 g_{k,h}(\mathbf{f})\|_{C(\mathbb{R})},$$

что и доказывает соотношение (21).

Оценка сверху в (22) получается аналогично. Оценка снизу в (22) вытекает из того факта, что норма интерполяционной ломаной $g_{k,h}(\mathbf{f},x)$ не превышает нормы интерполируемой функции $g_h(\mathbf{f},x)$.

Пусть $f \in C(\mathbb{R})$ и $\|g_h\|_{C(\mathbb{R})\to C(\mathbb{R})}$ – норма оператора g_h, то есть

$$\|g_h\|_{C(\mathbb{R})\to C(\mathbb{R})} = \sup_{\|f\|_{C(\mathbb{R})}\le 1} \|g_h(f)\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Положим

$$N(x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} |G(x-i)|$$

и для $k \in \mathbb{N}$

$$N_k(x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} |G_k(x-i)|.$$

Заметим, что так как $N(x)$ непрерывная 1-периодическая функция, то

$$\|N\|_{C(\mathbb{R})} = \|N\|_{C[0,1]}.$$

Теорема 5. *Справедливо равенство*

$$\|g_h\|_{C(\mathbb{R})\to C(\mathbb{R})} = \|N\|_{C[0,1]}. \tag{24}$$

Кроме того, для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\|N_k\|_{C[0,1]} \le \|g_h\|_{C(\mathbb{R})\to C(\mathbb{R})} \le \|N\|_{C[0,1]} + \frac{245}{288}\|\Delta^2 N_k\|_{C[0,1]}. \tag{25}$$

Доказательство. Пусть f произвольная функция из $C(\mathbb{R})$, такая, что $\|f\|_{C(\mathbb{R})} \le 1$, тогда из (10) вытекает

$$\|f\|_{C(\mathbb{R})} \le \left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i G\left(\frac{(\cdot)}{h} - i\right) \right\|_{C(\mathbb{R})} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i G\left(\frac{x}{h} - i\right)\right| \le$$

$$\le \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left| f_i G\left(\frac{x}{h} - i\right)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{i\in\mathbb{Z}} |f_i G(x-i)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{i\in\mathbb{Z}} |G(x-i)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} N(x).$$

Так как $N(x)$ непрерывная 1-периодическая функция, то существует точка x_0 такая, что

$$N(x_0) = \max_{x\in\mathbb{R}} N(x).$$

Через $f_0(x)$ обозначим непрерывную функцию, принимающую значения

$$\operatorname{sgn} G\left(\frac{x_0}{h} - i\right)$$

в точках $\frac{x_0}{h} - i$ и любые значения $f_0(x)$ ($|f_0(x)| < 1$) в остальных точках из $\mathbb{R}$. Тогда

$$\|g_h\|_{C(\mathbb{R})\to C(\mathbb{R})} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{i\in\mathbb{Z}} |G(x-i)|.$$

Равенство (24) доказано. Для завершения доказательства теоремы заметим, что из (23) и (12) сразу следует соотношение

$$\|N_k\|_{C[0,1]} \le \|N\|_{C[0,1]} \le \|N_k\|_{C[0,1]} + \frac{245}{288}\|\Delta^2 N_k\|_{C[0,1]}.$$

4. О погрешности приближения. Положим для $x \in [0,1]$

$$K(x) = x^6 - \sum_{i=-4}^{5} i^6 G(x-i)$$

и

$$K_k(x) = x^6 - \sum_{i=-4}^{5} i^6 G_k\left(x - i\right).$$

Теорема 6. *Пусть функция f такова, что $f^{(\nu)} \in C(\mathbb{R})$, $\nu = 0, 1, \ldots, 6$, тогда для $x \in [ih, (i+1)h]$ равномерно по $i \in \mathbb{Z}$ выполняется соотношение*

$$f(x) - g_h(x) = \frac{h^6}{6!} f_i^{(6)} K\left(\frac{x}{h} - i\right) + O(h^7), \tag{26}$$

кроме того,

$$\|K_k\|_{C(\mathbb{R})} - \frac{245}{288}\|\Delta^2 K_k\|_{C(\mathbb{R})} \le \frac{1}{h^6} \sup_{f \in W^6_{C(\mathbb{R})}} \|f - g_h\|_{C(\mathbb{R})} \le \|K_k\|_{C(\mathbb{R})} + \frac{245}{288}\|\Delta^2 K_k\|_{C(\mathbb{R})}$$

и

$$\|K_k\|_{p[0,1]} - \frac{245}{288}\|\Delta^2 K_k\|_{C(\mathbb{R})} \le \frac{1}{h^6} \sup_{f \in W^6_{C[0,1]}} \|f - g_h\|_{p[0,1]} \le \|K_k\|_{p[0,1]} + \frac{245}{288}\|\Delta^2 K_k\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Доказательство. Используя разложения по формуле Тейлора в окрестности точки ih равенство (12) перепишется в виде

$$g_h(f, x) = \sum_{\nu=i-4}^{i+5} \sum_{\mu=0}^{6} \frac{((\nu - i)h)^\mu}{\mu!} f_\nu^{(\mu)} G\left(\frac{x}{h} - \nu\right) + O(h^7).$$

Отсюда сразу получаем

$$f(x) - g_h(f, x) = \sum_{\nu=i-4}^{i+5} \sum_{\mu=0}^{6} \frac{h^\mu}{\mu!} f_\nu^{(\mu)} \left(x^{(\nu)} - (\nu - i)^\mu G\left(\frac{x}{h} - \nu\right)\right) + O(h^7).$$

Отсюда и из леммы сразу получаем (26).

Из (22) следует

$$\|K_k\|_{C(\mathbb{R})} \le \|K\|_{C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})} \le \|K_k\|_{C(\mathbb{R})} + \frac{245}{288}\|\Delta^2 K_k\|_{C(\mathbb{R})}$$

и

$$\|K_k\|_{p[0,1]} - \frac{245}{288}\|\Delta^2 K_k\|_{C(\mathbb{R})} \le \|K\|_{p[0,1]} \le \|K_k\|_{p[0,1]} + \frac{245}{288}\|\Delta^2 K_k\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Отсюда и из (26) сразу получаем утверждение теоремы.

5. Восстановление периодических функций Пусть, теперь $n \in \mathbb{N}$ фиксировано и $\mathbf{f}_i$ $2n$-периодическая последовательность, то есть

$$f_{i+2n} = f_i \ \ (i \in \mathbb{Z}).$$

Через $\tilde{G}_n(x)$ обозначим 2π-периодическое продолжение функции $G\left(x/h\right)$ и $\tilde{G}_{n,k}(x)$ – 2π-периодическое продолжение функции $G_k\left(x/h\right)$.

Ясно, что для любой последовательности $\mathbf{f}_i \in C(\mathbb{T})$ имеет место представление

$$g_h(f, x) = \sum_{i=1}^{2n} f_i \tilde{G}_n\left(\frac{x}{h} - i\right)$$

и

$$g_{k,h}(f, x) = \sum_{i=1}^{2n} f_i \tilde{G}_{n,k}\left(\frac{x}{h} - i\right).$$

Для каждого $x \in [ih, (i+1)h]$ $i = 0, \ldots, 2n$ в этих представлениях присутствуют только шесть слагаемых, то есть

$$g_h(f, x) = \sum_{\nu=i-4}^{i+5} f_i \tilde{G}_n\left(\frac{x}{h} - \nu\right)$$

и

$$g_{k,h}(f, x) = \sum_{\nu=i-4}^{i+5} f_i \tilde{G}_{n,k}\left(\frac{x}{h} - \nu\right).$$

Дословно повторяя предыдущие рассуждения убеждаемся в том, что

$$\|g_h\|_{C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})} = \|N\|_{C[0,1]}.$$

и для $x \in [ih, (i+1)h]$ погрешность имеет вид (26).

Список литературы

[1] *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Асимптотические методы восстановления кривых. Киев, Изд. Института математики НАН Украины, 1997.

[2] *Holschneider M.* Wavelets. An analysis Tool. Oxfodr. Oxford University Press, 1995.

[3] *Dubuc S.* Interpolation through an Iterative Scheme. Journal of Math. An. and Appl., 1986, 185-204.

[4] *De Marchi S.* The Dyadic Iterative Interpolation Method and some extensions. TR nr. 10/94, University of Padua, 1994.