Ligun A., Shumeiko A. Linear method of recovery of function of two variables on a binary lamination.East Journal of Approximation, (2001), v.7, N 3.

УДК 517.5-514.17

Линейный метод восстановления функций двух переменных, основанный на бинарном расслоении.

А.А.Лигун, А.А.Шумейко

Введение. Бурное развитие коммуникационных систем стимулирует поиск новых подходов к задачам связанными с передачей информации, в частности, изображений. В таких задачах единицей информации является среднее значение функции на некотором (чаще квадратном) разбиении области определения. Часто в таких системах для предварительного анализа используют загрубленное изображение (средние значения по более крупному разбиению), а когда требуется дополнительная информация она отсылается получателю отдельной порцией. Анализ грубой картинки производится чаще всего посредством функции построенной по информации о ее средних значениях. В данной статье исследуется один линейный метод восстановления функции основанного на последовательном уточнении – на каждом шаге восстановления количество информации увеличивается в 2×2 раза. Такой подход удобен при программировании на ЭВМ. Некоторые идеи этого метода пересекаются с идеями теории wavelets, которые в последнее время получают все большее распространение.

Определения и постановка задачи. Через ℓ^2_∞ обозначим линейное пространство всех ограниченных двумерных последовательностей

$$\tilde{F} = \left\{\tilde{f}_{i,j,0}\right\}_{i,j\in\mathbb{Z}} = \left\{\tilde{f}_{i,j}\right\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$$

с нормой

$$\|\tilde{F}\|_{\ell^2_\infty} = \sup_{i,j\in\mathbb{Z}} |\tilde{f}_{i,j}|.$$

Через $L_\infty(\mathbb{E})$ обозначим линейное пространство всех непрерывных ограниченных на $\mathbb{E}$ функций $f(x,y)$ с нормой

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{E})} = \mathrm{vraisup}_{(x,y)\in\mathbb{E}}\, |f(x,y)|, \tag{1}$$

$L_p(\mathbb{E})$ $(p \in [1,\infty))$ – пространство всех измеримых суммируемых на $\mathbb{E}$ в p-й степени функций с нормой

$$\|f\|_{p(\mathbb{E})} = \left(\int_{\mathbb{E}} |f(x,y)|^p dxdy\right)^{1/p}. \tag{2}$$

Пусть Δ^0 есть разбиение $\mathbb{R}^2$ на квадратную решетку с шагом h и вершинами в точках $\{M_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{Z}} = \{(x_{i,0}, y_{j,0})\}_{i,j\in\mathbb{Z}} = \{(ih, jh)\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$. Каждому значению двумерного массива $\tilde{F}^0 = \{\tilde{f}_{i,j,0}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ перенумерованного естественным образом, поставим в соответствие элемент разбиения Δ^0.

Зададим на множестве ограниченных массивов $\tilde{F}^0$ функционал B. Положим $B^{++}(\tilde{F}^0) = B(\{\tilde{f}_{i,j,0}\}_{i,j\in\mathbb{Z}})$, $B^{--}(\tilde{F}^0) = B(\{\tilde{f}_{-1-i,-1-j,0}\}_{i,j\in\mathbb{Z}})$, $B^{-+}(\tilde{F}^0) = B(\{\tilde{f}_{-1-i,j,0}\}_{i,j\in\mathbb{Z}})$ и $B^{+-}(\tilde{F}^0) = B(\{\tilde{f}_{i,-1-j,0}\}_{i,j\in\mathbb{Z}})$.

Определим точки $M_{i+1/2,j,0}, M_{i,j+1/2,0}, M_{i+1/2,j+1/2,0}$ равенствами

$$M_{i+1/2,j,0} = \frac{1}{2}(M_{i,j} + M_{i+1,j}), \tag{3}$$

$$M_{i,j+1/2,0} = \frac{1}{2}(M_{i,j} + M_{i,j+1}), \tag{4}$$

$$M_{i+1/2,j+1/2,0} = \frac{1}{4}(M_{i,j+1} + M_{i+1,j} + M_{i,j} + M_{i+1,j+1}). \tag{5}$$

Для сдвига массива $\tilde{F}^0_{\nu,\mu} = \{\tilde{f}_{i+\nu,j+\mu,0}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ определим новую решетку Δ^1 и новый массив $\tilde{F}^1 = \{\tilde{f}_{i,j,1}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ равенствами

$$M_{2i,2j,1} = M_{i,j,0}, \tilde{f}_{2i,2j,1} = B^{--}(\tilde{F}^0_{i,j}), i,j \in \mathbb{Z},$$

$$M_{2i+1,2j,1} = M_{i+1/2,j,0}, \tilde{f}_{2i+1,2j,1} = B^{+-}(\tilde{F}^0_{i,j}), i,j \in \mathbb{Z},$$

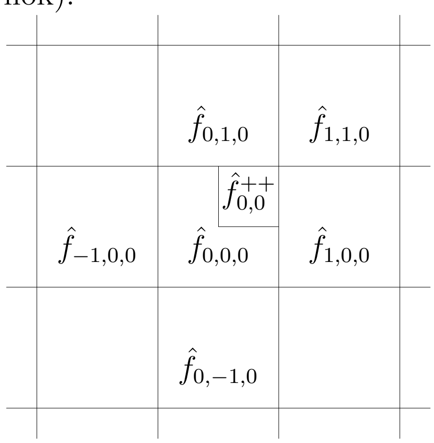
$$M_{2i,2j+1,1} = M_{i,j+1/2,0}, \tilde{f}_{2i,2j+1,1} = B^{-+}(\tilde{F}^0_{i,j}), i,j \in \mathbb{Z},$$

$$M_{2i+1,2j+1,1} = M_{i+1/2,j+1/2,0}, \tilde{f}_{2i+1,2j+1,1} = B^{++}(\tilde{F}^0_{i,j}), i,j \in \mathbb{Z}.$$

Полученный набор будем использовать в качестве исходного, продолжая этот процесс приходим к формулам расслоения (то есть дробления решетки)

$$\begin{gathered} M_{2i,2j,k} = M_{i,j,k-1}, \tilde{f}_{2i,2j,k} = B^{--}(\tilde{F}^{k-1}_{i,j}), i,j \in \mathbb{Z}, \\ M_{2i+1,2j,k} = M_{i+1/2,j,k-1}, \tilde{f}_{2i+1,2j,k} = B^{+-}(\tilde{F}^{k-1}_{i,j}), i,j \in \mathbb{Z}, \\ M_{2i,2j+1,k} = M_{i,j+1/2,k-1}, \tilde{f}_{2i,2j+1,k} = B^{-+}(\tilde{F}^{k-1}_{i,j}), i,j \in \mathbb{Z}, \\ M_{2i+1,2j+1,k} = M_{i+1/2,j+1/2,k-1}, \tilde{f}_{2i+1,2j+1,k} = B^{++}(\tilde{F}^{k-1}_{i,j}), i,j \in \mathbb{Z}. \end{gathered} \tag{6}$$

Рассмотрим один способ построения функционала B. Пусть $P(\tilde{F}^0, x, y)$ полином второго порядка имеющий средние значения $\hat{f}_{0,-1,0}$, $\hat{f}_{-1,0,0}$, $\hat{f}_{0,0,0}$, $\hat{f}_{1,0,0}$, $\hat{f}_{0,1,0}$, $\hat{f}_{1,1,0}$ на соответствующих им квадратах (см. рисунок).



Положим

$$B(\tilde{F}^0) = \hat{f}^{++}_{0,0,0} = \frac{4}{h^2}\int_0^{\frac{h}{2}}\int_0^{\frac{h}{2}} P(\tilde{F}^0, x, y)\,dx\,dy = \tag{7}$$

$$= -\frac{1}{8}\hat{f}_{0,-1,0} - \frac{1}{8}\hat{f}_{-1,0,0} + \frac{17}{16}\hat{f}_{0,0,0} + \frac{1}{16}\hat{f}_{1,0,0} + \frac{1}{16}\hat{f}_{0,1,0} + \frac{1}{16}\hat{f}_{1,1,0}.$$

Таким образом формулы расслоения (6) примут вид

$$
\begin{gathered}
x_{2i,k} = x_{i,k-1} + \frac{h}{2^{k+1}}, \quad y_{2j,k} = y_{j,k-1} + \frac{h}{2^{k+1}}, \\
\hat{f}_{2i,2j,k} = -\frac{1}{8}\hat{f}_{i,j-1,k-1} - \frac{1}{8}\hat{f}_{i-1,j,k-1} + \frac{17}{16}\hat{f}_{i,j,k-1} + \\
+\frac{1}{16}\hat{f}_{i+1,j,k-1} + \frac{1}{16}\hat{f}_{i,j+1,k-1} + \frac{1}{16}\hat{f}_{i+1,j+1,k-1}, \\
x_{2i-1,k} = x_{i,k-1} - \frac{h}{2^{k+1}}, \quad y_{2j,k} = y_{j,k-1} + \frac{h}{2^{k+1}}, \\
\hat{f}_{2i-1,2j,k} = -\frac{1}{8}\hat{f}_{i,j-1,k-1} - \frac{1}{8}\hat{f}_{i+1,j,k-1} + \frac{17}{16}\hat{f}_{i,j,k-1} + \\
+\frac{1}{16}\hat{f}_{i-1,j,k-1} + \frac{1}{16}\hat{f}_{i,j+1,k-1} + \frac{1}{16}\hat{f}_{i-1,j+1,k-1}, \\
x_{2i,k} = x_{i,k-1} + \frac{h}{2^{k+1}}, \quad y_{2j-1,k} = y_{j,k-1} - \frac{h}{2^{k+1}}, \\
\hat{f}_{2i,2j-1,k} = -\frac{1}{8}\hat{f}_{i,j+1,k-1} - \frac{1}{8}\hat{f}_{i-1,j,k-1} + \frac{17}{16}\hat{f}_{i,j,k-1} + \\
+\frac{1}{16}\hat{f}_{i+1,j,k-1} + \frac{1}{16}\hat{f}_{i,j-1,k-1} + \frac{1}{16}\hat{f}_{i+1,j-1,k-1}, \\
x_{2i-1,k} = x_{i,k-1} - \frac{h}{2^{k+1}}, \quad y_{2j-1,k} = y_{j,k-1} - \frac{h}{2^{k+1}}, \\
\hat{f}_{2i-1,2j-1,k} = -\frac{1}{8}\hat{f}_{i,j+1,k-1} - \frac{1}{8}\hat{f}_{i+1,j,k-1} + \frac{17}{16}\hat{f}_{i,j,k-1} + \\
+\frac{1}{16}\hat{f}_{i-1,j,k-1} + \frac{1}{16}\hat{f}_{i,j-1,k-1} + \frac{1}{16}\hat{f}_{i-1,j-1,k-1}.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Функционал (7) можно определить исходя из других соображений. Пусть функция $f(x,y)$ интегрируемая на $\mathbb{R}^2$ такова, что $\frac{\partial^\nu f}{\partial x^n \partial y^m} \in C(\mathbb{R}^2)$, $\nu = 0,\ldots,2,\ \ n,m \geq 0,\ \ n+m \leq 2$ и $\hat{f}_{i,j}$ – ее среднее значение на квадратах $(x,y) \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) \times (y_{j-1/2},\, y_{j+1/2})$. Функционал B будем искать в виде

$$
\alpha_0 \hat{f}_{1,1,0} + \alpha_1 \frac{\hat{f}_{0,1,0} + \hat{f}_{1,0,0}}{2} + \alpha_2 \hat{f}_{0,0,0} + \alpha_3 \frac{\hat{f}_{0,-1,0} + \hat{f}_{-1,0,0}}{2}, \tag{9}
$$

где коэффициенты α_i выбираются так, чтобы разность между $\hat{f}^{++}_{0,0,0}$ и выражением (9) имела как можно более высокий порядок точности. Используя формулу Тейлора нетрудно видеть, что это условие сводится к системе линейных уравнений с решением

$$
\alpha_0 = \frac{1}{16}; \quad \alpha_1 = \frac{1}{8}; \quad \alpha_2 = \frac{17}{16}; \quad \alpha_3 = -\frac{1}{4}. \tag{10}
$$

Таким образом мы прийдем к функционалу (7).

Рассмотрим еще один подход к построению функционала (7). Снова расслоение $\hat{f}_{i,j,0}$ будем искать в виде линейной комбинации (9), но коэффициенты α_r $(r = 0,\ldots,3)$ выберем из условия наивысшей алгебраической точности. То есть так, чтобы соотношение (9) обращалось в равенство для функций $f(x,y)=x^ny^m$ $(n,m\geq 0,\ \ n+m\leq 2)$. Это приводит к системе

$$\begin{cases} \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1; \\ 4\alpha_0+2\alpha_1-2\alpha_3=1; \\ 13\alpha_0+7\alpha_1+\alpha_2+7\alpha_3=1; \\ \alpha_0=\dfrac{1}{16}. \end{cases} \tag{11}$$

Решением системы есть числа (10).

Линейный метод восстановления. Для фиксированных $i,j\in\mathbb{Z}$ соединим точки $M_{i+1,j,k}$, $M_{i,j,k}$, $M_{i,j+1,k}$, $M_{i+1,j+1,k}$ с центром $M_{i+1/2,j+1/2,k}$ соответствующего квадрата. Таким образом получим триангуляцию плоскости на равнобедренные прямоугольные треугольники. Непрерывную на всей плоскости функцию двух переменных назовем k-полигоном, если она на каждом из этих треугольников совпадает с плоскостью.

Через $\psi_{k,h}(\tilde{F},x,y)$ обозначим k-полигон интерполирующий в узлах $M_{i,j,k}, i,j\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{N}$ значения $\frac{1}{4}(\tilde{f}_{i,j,k}+\tilde{f}_{i+1,j,k}+\tilde{f}_{i,j+1,k}+\tilde{f}_{i+1,j+1,k})$, а в точках $M_{i+1/2,j+1/2,k}$ принимающий значения $\tilde{f}_{i,j,k}$.

Пусть

$$\Delta_x^2 z(x,y)=z(x+2^{-k}h,y)-2z(x,y)+z(x-2^{-k}h,y),$$

$$\Delta_y^2 z(x,y)=z(x,y+2^{-k}h)-2z(x,y)+z(x,y-2^{-k}h),$$

$$\Delta_-^2 z(x,y)=z(x,y)+z(x+2^{-k}h,y+2^{-k}h)-z(x+2^{-k}h,y)-z(x,y+2^{-k}h),$$

$$\Delta_+^2 z(x,y)=z(x+2^{-k}h,y)+z(x,y+2^{-k}h)+z(x-2^{-k}h,y)+z(x,y-2^{-k}h)-4z(x,y),$$

и

$$\|\sigma^2 z\|_{C(\mathbb{R}^2)}=\max\{\|\Delta_x^2 z\|_{C(\mathbb{R}^2)},\|\Delta_y^2 z\|_{C(\mathbb{R}^2)},\|\Delta_-^2 z\|_{C(\mathbb{R}^2)},\|\Delta_+^2 z\|_{C(\mathbb{R}^2)}\},$$

$$\|\sigma^2\tilde{F}\|_{\ell^2_\infty}=\max_{i,j\in\mathbb{Z}}\max\{|\hat{f}_{i+1,j,0}-2\hat{f}_{i,j,0}+\hat{f}_{i-1,j,0}|,|\hat{f}_{i,j+1,0}-2\hat{f}_{i,j,0}+\hat{f}_{i,j-1,0}|,$$

$$|\hat{f}_{i,j,0}+\hat{f}_{i+1,j+1,0}-\hat{f}_{i,j+1,0}-\hat{f}_{i+1,j,0}|,|\hat{f}_{i-1,j,0}+\hat{f}_{i,j+1,0}+\hat{f}_{i+1,j,0}+\hat{f}_{i,j-1,0}-4\hat{f}_{i,j,0}|\}$$

Лемма 1 *Для любой последовательности $\tilde{F}\in l_\infty$ и $k\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$\|\sigma^2\psi_{k+1,h}(\tilde{F})\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\leq\frac{3}{4}\|\sigma^2\psi_{k,h}(\tilde{F})\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\leq\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}\|\sigma^2\tilde{F}\|_{\ell^2_\infty}. \tag{12}$$

Доказательство. Представим индексы i и j в виде $i=2\nu+\xi$ и $j=2\mu+\eta$, где $\nu,\mu\in\mathbb{Z}$ и $\xi,\eta=0,1$, тогда для

$$(x,y)\in\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2^k},\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2^k}\right)\times\left(\left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2^k},\left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2^k}\right)$$

имеет место равенство

$$\begin{gathered}\Delta_+^2\psi_{k+1,h}(\tilde{F},x,y)=-4\psi_{k+1,h}(\tilde{F},x_{2\nu+\xi,k+1},y_{2\mu+\eta,k+1})+\\ +\psi_{k+1,h}(\tilde{F},x_{2\nu+\xi,k+1},y_{2\mu+\eta+1,k+1})+\psi_{k+1,h}(\tilde{F},x_{2\nu+\xi+1,k+1},y_{2\mu+\eta,k+1})+\\ +\psi_{k+1,h}(\tilde{F},x_{2\nu+\xi,k+1},y_{2\mu+\eta-1,k+1})+\psi_{k+1,h}(\tilde{F},x_{2\nu+\xi-1,k+1},y_{2\mu+\eta,k+1})=\end{gathered} \tag{13}$$

$$= \sum_{n=0}^{3}\sum_{m=0}^{3} a^{\xi,\eta}_{n,m}\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu+n-1,k}, y_{\mu+m-1,k}),$$

где $A_{\xi,\eta} = (a^{\xi,\eta}_{n,m})^{3\ 3}_{n,m=0}$ матрицы коэффициентов. Приведем несколько матриц $A_{\xi,\eta}$.

$$A_{1,1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & -2 & 0 \\ 7 & -32 & 13 & -2 \\ 0 & 7 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{0,1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 13 & -1 \\ -2 & 13 & -32 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом при $i = 2\nu + 1$ и $j = 2\mu + 1$ для

$$(x,y) \in \left(\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2^k}, \left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2^k}\right) \times \left(\left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2^k}, \left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2^k}\right)$$

имеет место соотношение

$$\Delta^2_+\psi_{k+1,h}(\tilde F, x, y) = \sum_{n=0}^{3}\sum_{m=0}^{3} a^{1,1}_{n,m}\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu+n-1,k}, y_{\mu+m-1,k}) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(7\Delta^2_+\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu,k}, y_{\mu,k}) - \Delta^2_+\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu,k}, y_{\mu+1,k}) - \right.$$

$$\left. -\Delta^2_+\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu+1,k}, y_{\mu-1,k}) - \Delta^2_y\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu,k}, y_{\mu+1,k}) - \Delta^2_x\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu+1,k}, y_{\mu,k}).\right).$$

Следовательно,

$$\|\Delta^2_+\psi_{k+1,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} \le \frac{11}{16}\|\sigma^2\psi_{k,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}. \qquad (14)$$

Рассматривая остальные случаи убеждаемся, что соотношение (14) справедливо для всех $\xi, \eta = 0, 1$.

Аналогично получаем

$$\Delta^2_-\psi_{k+1,h}(\tilde F, x, y) = \sum_{n=0}^{3}\sum_{m=0}^{3} b^{\xi,\eta}_{n,m}\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu+n-1,k}, y_{\mu+m-1,k}),$$

где $B_{\xi,\eta} = (b^{\xi,\eta}_{n,m})^{3\ 3}_{n,m=0}$ матрицы коэффициентов, например,

$$B_{1,1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -16 & 16 & -2 \\ -2 & 16 & -16 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$\Delta^2_-\psi_{k+1,h}(\tilde F, x, y) = \sum_{n=0}^{3}\sum_{m=0}^{3} b^{1,1}_{n,m}\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu+n-1,k}, y_{\mu+m-1,k}) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(2\Delta^2_+\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu,k}, y_{\mu+1,k}) - 2\Delta^2_+\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu+1,k}, y_{\mu+1,k}) - \right.$$

$$-2\Delta_+^2\psi_{k,h}(\tilde F,x_{\nu,k},y_{\mu,k})+2\Delta_+^2\psi_{k,h}(\tilde F,x_{\nu+1,k},y_{\mu,k})+4\Delta_-^2\psi_{k,h}(\tilde F,x_{\nu,k},y_{\mu,k}).\Big).$$

Отсюда имеем

$$\|\Delta_-^2\psi_{k+1,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\le\frac{3}{4}\|\sigma^2\psi_{k,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}. \tag{15}$$

Рассматривая остальные случаи убеждаемся, что соотношение (15) справедливо для всех $\xi,\eta=0,1$.

Аналогично получаем, что для всех $\xi,\eta=0,1$ выполняются неравенства

$$\|\Delta_x^2\psi_{k+1,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\le\frac{1}{2}\|\sigma^2\psi_{k,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}, \tag{16}$$

$$\|\Delta_y^2\psi_{k+1,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\le\frac{1}{2}\|\sigma^2\psi_{k,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}, \tag{17}$$

и, следовательно,

$$\|\sigma^2\psi_{k+1,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\le\frac{3}{4}\|\sigma^2\psi_{k,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Последовательно используя полученное неравенство, получаем

$$\|\sigma^2\psi_{k+1,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\le\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}\|\sigma^2\psi_{0,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Отсюда и из очевидного равенства

$$\left\|\sigma^2\psi_{0,h}(\tilde F)\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}=\left\|\sigma^2\tilde F\right\|_{\ell^2_\infty}, \tag{18}$$

сразу получаем справедливость соотношения (12).

Лемма 2 *Для любой последовательности $\tilde F$, и любого фиксированного $k\in\mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$\|\psi_{k+1,h}(\tilde F)-\psi_{k,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\le\frac{1}{4}\|\sigma^2\psi_{k,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}. \tag{19}$$

Доказательство. Из построения метода следует, что экстремум величины $\psi_{k+1,h}(\tilde F,x,y)-\psi_{k,h}(\tilde F,x,y)$ достигается в точках $M_{i,j,k+1}$ или $M_{i+1/2,j+1/2,k+1}$. Проводя вычисления, убеждаемся в том, что

$$\psi_{k+1,h}(\tilde F,x_{2i,k+1},y_{2i,k+1})-\psi_{k,h}(\tilde F,x_{2i,k+1},y_{2i,k+1})=\sum_{n=0}^{2}\sum_{m=0}^{2}\beta_{n,m}\psi_{k,h}(\tilde F,x_{\nu+n-1,k},y_{\mu+m-1,k}),$$

где

$$(\beta_{n,m})_{n,m=0}^{2\ 2}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&4&-2\\1&-2&1\end{pmatrix},$$

и

$$|\psi_{k+1,h}(\tilde F,x_{2i,k+1},y_{2i,k+1})-\psi_{k,h}(\tilde F,x_{2i,k+1},y_{2i,k+1})|\le\frac{1}{4}\|\sigma^2\psi_{k,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Аналогично убеждаемся в том, что

$$|\psi_{k+1,h}(\tilde F,x_{2i+1/2,k+1},y_{2i+1/2,k+1})-\psi_{k,h}(\tilde F,x_{2i,k+1},y_{2i,k+1})|\le\frac{3}{16}\|\sigma^2\psi_{k,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)},$$

$$|\psi_{k+1,h}(\tilde F,x_{2i,k+1},y_{2i+1,k+1})-\psi_{k,h}(\tilde F,x_{2i,k+1},y_{2i,k+1})|\le\frac14\|\sigma^2\psi_{k,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Таким образом полигон $\psi_{k+1,h}(\tilde F,x,y)$ уклоняется от полигона $\psi_{k,h}(\tilde F,x,y)$ на треугольнике с вершинами в точках $M_{2i,2j,k+1}$, $M_{2i+1/2,2j+1/2,k+1}$, $M_{2i,2j+1,k+1}$ не более чем на величину

$$\frac14\|\sigma^2\psi_{k,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Проводя аналогичные построения убеждаемся в справедливости соотношения (19).

Лемма 3 *Для любой последовательности* $\tilde F\in\ell^2_\infty$, *и* $k\in\mathbb{N}$ *имеет место неравенство*

$$\left\|\psi_{k,h}(\tilde F)-\psi_{k+m,h}(\tilde F)\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\le\frac13\left(\frac34\right)^{k+1}\left\|\sigma^2\tilde F\right\|_{\ell^2_\infty}. \tag{20}$$

Доказательство. Из очевидного неравенства

$$\left\|\psi_{k,h}(\tilde F)-\psi_{k+m,h}(\tilde F)\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\le\sum_{i=k}^{m-1}\left\|\psi_{i+1,h}(\tilde F)-\psi_{i,h}(\tilde F)\right\|_{\ell^2_\infty}$$

и леммы 2 вытекает

$$\left\|\psi_{k,h}(\tilde F)-\psi_{k+m,h}(\tilde F)\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\le\frac14\sum_{i=k}^{m-1}\|\sigma^2\psi_{i,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Применяя лемму 1, отсюда получаем

$$\left\|\psi_{k,h}(\tilde F)-\psi_{k+m,h}(\tilde F)\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\le$$

$$\le\frac14\|\sigma^2\psi_{k,h}(\tilde F)\|\left(1+\frac34+\left(\frac34\right)^2+\left(\frac34\right)^3+\dots\right)=$$

$$=\frac13\left(\frac34\right)^{k+1}\left\|\sigma^2\psi_{0,h}(\tilde F)\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Отсюда и из (18) следует утверждение леммы 3.

Из леммы 3 следует, что последовательность $\{\psi_{k,h}(\tilde F,x,y)\}_{k=0}^\infty$ сходится в себе. Нетрудно видеть, что она ограничена (более того, далее мы покажем, что норма оператора $\psi_{k,h}(\tilde F,x,y)$ ограничена в совокупности и невелика). Отсюда следует, что поточечный предел $\psi_{k,h}(\tilde F,x,y)$ при $k\to\infty$ существует. Обозначим этот предел через $\psi_h(\tilde F,x,y)$.

Так как для любого $k\in\mathbb{N}$ оператор $\psi_{k,h}(f)$ есть линейный оператор, отображающий пространство ℓ^2_∞ в пространство полигонов определенных на квадратных областях $(x_{i,k}-h/2^k,x_{i,k}+h/2^k)\times(y_{j,k}-h/2^k,y_{j,k}+h/2^k)$, то ψ_h есть линейный оператор, отображающий пространство ℓ^2_∞ в пространство $C(\mathbb{R}^2)$ (это следует из (12)).

Переходя к пределу по $m\to\infty$ в (20), немедленно получаем следующее утверждение.

Теорема 1 *Для любого фиксированного* $k\in\mathbb{N}$ *и любой последовательности* $\tilde F\in\ell^2_\infty$ *верно неравенство*

$$\left\|\psi_h(\tilde F)-\psi_{k,h}(\tilde F)\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\le\frac13\left(\frac34\right)^{k+1}\left\|\sigma^2\tilde F\right\|_{\ell^2_\infty}.$$

В случае, когда задана функция $f \in C(\mathbb{R}^2)$ и значения $\tilde{f}_{i,j,0}$ определены равенствами

$$\tilde{f}_{i,j,0} = \frac{1}{h^2} \int_{(i-1/2)h}^{(i+1/2)h} \int_{(j-1/2)h}^{(j+1/2)h} f(x,y)\,dx\,dy,$$

вместо $\psi_{k,h}(\tilde{F},x,y)$ будем писать $\psi_{k,h}(f,x,y)$.

Из построения оператора $\psi_{k,h}(\tilde{F})$ следует, что для любых $k,\nu = 0,1,2,\dots$ имеют место равенства

$$\psi_{k,h2^{-\nu}}(\tilde{F}^{\nu},x,y) = \psi_{k,h2^{-\nu}}(\psi_{\nu,h}(\tilde{F},x,y)) = \psi_{k+\nu,h}(\tilde{F},x,y). \tag{21}$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\psi_{h2^{-\nu}}(\tilde{F}^{\nu},x,y) = \psi_h(\tilde{F},x,y). \tag{22}$$

Кроме того, из построения функции $\psi_h(\tilde{F},x,y)$ ясно, что

$$\psi_h(\tilde{F},x,y) = \psi_{h/2^k}(\psi_h(\tilde{F},x,y)). \tag{23}$$

Теорема 2 *Пусть $p \in [1,\infty)$, числа $k \in \mathbb{N}$ и $\Re \in \mathbb{R}^2$. Для любой последовательности $\tilde{F} \in \ell^2_\infty$ имеют место неравенства*

$$\Big| \|\psi_h(\tilde{F})\|_{p(\Re)} - \|\psi_{k,h}(\tilde{F})\|_{p(\Re)} \Big| \le \tag{24}$$

$$\le (\mathrm{mes}\,\Re)^p \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} \left\|\sigma^2\tilde{F}\right\|_{\ell^2_\infty}.$$

и

$$\|\psi_{k,h}(\tilde{F})\|_{L_\infty(\Re)} \le \|\psi_h(\tilde{F})\|_{L_\infty(\Re)} \le \tag{25}$$

$$\le \|\psi_{k,h}(\tilde{F})\|_{L_\infty(\Re)} + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} \left\|\sigma^2\tilde{F}\right\|_{\ell^2_\infty}.$$

Доказательство. Действительно, из теоремы 1, из неравенств верных для любых $p \in [1,\infty)$ и $g,c \in L_p(\Re)$

$$\|g\|_{L_p(\Re)} - \|c\|_{L_p(\Re)} \le \|g-c\|_{L_p(\Re)} \le \|g\|_{L_p(\Re)} + \|c\|_{L_p(\Re)}$$

и очевидного неравенства

$$\|g\|_{L_p(\Re)} \le (\mathrm{mes}\,\Re)^p \|g\|_{L_\infty(\Re)},$$

сразу получаем для $p \in [1,\infty)$ соотношение (24).

Оценка снизу в (25) вытекает из того факта, что норма функции $\psi_{k,h}(\tilde{F},x,y)$ в $L_\infty(\Re)$ не превышает нормы функции $\psi_h(\tilde{F},x,y)$.

2. Базисная функция и ее свойства. Пусть $h=1$ и $\tilde{F}^* = \{\hat{f}^*_{0,i,j}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$, где

$$\hat{f}^*_{0,i,j} = \begin{cases} 1, & \nu{=}\mu{=}0; \\ 0, & \nu,\mu \ne 0. \end{cases}$$

Положим

$$\Psi_k(x,y) = \psi_{k,1}(\tilde{F}^*,x,y)$$

и

$$\Psi(x,y) = \psi_1(\tilde{F}^*,x,y).$$

График функции $\Psi(x, y)$.

Ясно, то

$$\psi_{k,h}(\tilde{F}^*, x, y) = \Psi_k\left(\frac{x}{h}, \frac{y}{h}\right)$$

и если $\tilde{F}^*_{i,j}$ сдвиг последовательности $\tilde{F}^*$, то

$$\psi_{k,h}(\tilde{F}^*_{i,j}, x, y) = \Psi_k\left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j\right).$$

Отсюда и из линейности оператора $\psi_{k,h}$ следует

$$\psi_{k,h}(\tilde{F}, x, y) = \psi_{k,h}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i\in\mathbb{Z}} \tilde{f}_{i,j,0}\tilde{F}^*_{i,j}, x, y\right) =$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i\in\mathbb{Z}} \tilde{f}_{i,j,0}\psi_{k,h}\left(\tilde{F}^*_{i,j}, x, y\right) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i\in\mathbb{Z}} \tilde{f}_{i,j,0}\Psi_k\left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j\right), \tag{26}$$

следовательно, для любой последовательности $\tilde{F} \in \ell^2_\infty$, любого $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и $h > 0$ имеют место равенства

$$\psi_h(\tilde{F}, x, y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i\in\mathbb{Z}} \tilde{f}_{i,j,0}\Psi\left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j\right) \tag{27}$$

Носитель функции $\Psi(x, y)$ есть восьмиугольник с вершинами $(\pm 5/2, \pm 1/2), (\pm 1/2, \pm 5/2)$.

Таким образом для $(x, y) \in (x_{i-\frac{1}{2},k}, x_{i+\frac{1}{2},k}) \times (y_{j-\frac{1}{2},k}, y_{j+\frac{1}{2},k})$ выполняются равенства

$$\psi_{k,h}(\tilde{F}, x, y) = \sum_{\mu=j-2}^{j+2}\sum_{\nu=i-2}^{i+2} \hat{f}_{\nu,\mu,0}\Psi_k\left(\frac{x}{h} - \nu, \frac{y}{h} - \mu\right). \tag{28}$$

и

$$\psi_h(\tilde{F}, x, y) = \sum_{\mu=j-2}^{j+2}\sum_{\nu=i-2}^{i+2} \hat{f}_{\nu,\mu,0}\Psi\left(\frac{x}{h} - \nu, \frac{y}{h} - \mu\right) \tag{29}$$

и более того, для фиксированных $i, j \in \mathbb{Z}$ в равенствах (28) и (29) не более чем 17 слагаемых отличны от нуля.

Многие свойства оператора $\psi_h(\tilde{F})$ (или $\psi_{k,h}(\tilde{F})$) следуют из свойств базисных функций $\Psi(x, y)$ (или $\Psi_k(x, y)$).

Из (22) имеем равенство

$$\psi_h(\tilde{F}^0, x, y) = \psi_{h/2}(\tilde{F}^1, x, y),$$

в частности,

$$\psi_1(\tilde{F}^{*,0}, x, y) = \psi_{1/2}(\tilde{F}^{*,1}, x, y)$$

или, что то же

$$\Psi(x,y) = \sum_{\mu=-2}^{2} \sum_{\nu=-2}^{2} \hat{f}^{*,1}_{\nu,\mu} \Psi\left(2x-\nu, 2y-\mu\right). \tag{30}$$

Вычисляя числа $\hat{f}^{*,1}_{\nu,\mu}$, получаем свойство маштабируемости, которое можно записать в виде следующего утверждения

Теорема 3 *Для всех $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ имеет место равенство*

$$\Psi(x,y) = \sum_{\nu=-3}^{2} \sum_{\mu=-3}^{2} \gamma_{\nu,\mu} \Psi(2x+2\nu+1, 2y+2\mu+1), \tag{31}$$

где

$$(\gamma_{\nu,\mu})^{2}_{\nu,\mu=-3} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 17 & 17 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 17 & 17 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. О норме оператора $\psi_h(f)$. Пусть $f \in C(\mathbb{R}^2)$ и $\|\psi_h\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)\to L_\infty(\mathbb{R}^2)}$ – норма оператора ψ_h, то есть

$$\|\psi_h\| = \|\psi_h\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)\to L_\infty(\mathbb{R}^2)} = \sup_{\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\le 1} \|\psi_h(f)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Положим для $k \in \mathbb{N}$

$$N_k(x,y) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \left|\Psi_k\left(x-i, y-j\right)\right|$$

и

$$N(x,y) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \left|\Psi\left(x-i, y-j\right)\right|. \tag{32}$$

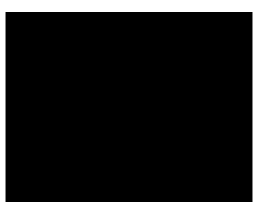


График функции $N(x,y)$.

Теорема 4 *Справедливо равенство*

$$\|\psi_h\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)\to L_\infty(\mathbb{R}^2)} = \|N\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}. \tag{33}$$

Кроме того, для любого $k \in \mathbb{N}$ и $h > 0$

$$\|N_k\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} \le \|\psi_h\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)\to L_\infty(\mathbb{R}^2)} \le \tag{34}$$

$$\le \|N_k\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} + \frac{136}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}.$$

Доказательство. Пусть f произвольная функция из $C(\mathbb{R}^2)$, такая, что $\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} \le 1$ и

$$\hat{f}_{\nu,\mu} = \frac{1}{h^2}\int_{\mu h-\frac{h}{2}}^{\mu h+\frac{h}{2}}\int_{\nu h-\frac{h}{2}}^{\nu h+\frac{h}{2}} f(t,p)\,dt\,dp \quad (\nu,\mu \in \mathbb{Z}).$$

Тогда из (29) вытекает, что

$$\|\psi_h\| = \sup_{i,j\in\mathbb{Z}}\left\|\sum_{\mu=j-1}^{j+1}\sum_{\nu=i-1}^{i+1}\hat{f}_{\nu,\mu}\Psi\left(\frac{x}{h}-\nu,\frac{y}{h}-\mu\right)\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} =$$

$$= \sup_{i,j\in\mathbb{Z}}\left\|\sum_{\mu=j-2}^{j+2}\sum_{\nu=i-2}^{i+2}\frac{1}{h^2}\int_{y_\mu-\frac{h}{2}}^{y_\mu+\frac{h}{2}}\int_{x_\nu-\frac{h}{2}}^{x_\nu+\frac{h}{2}} f(t,p)\,dt\,dp\,\Psi\left(\frac{x}{h}-\nu,\frac{y}{h}-\mu\right)\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Пусть

$$\delta_h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{h^2}, & (x,y) \in \left(-\dfrac{h}{2},\dfrac{h}{2}\right)\times\left(-\dfrac{h}{2},\dfrac{h}{2}\right); \\ 0, & (x,y) \notin \left(-\dfrac{h}{2},\dfrac{h}{2}\right)\times\left(-\dfrac{h}{2},\dfrac{h}{2}\right), \end{cases}$$

тогда

$$\|\psi_h\| = \sup_{\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\le 1}\left|\int\int_{\mathbb{R}^2}\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\delta(t-ih,p-jh)\Psi\left(\frac{x}{h}-i,\frac{y}{h}-j\right)\, f(t,p)\,dt\,dp\right| \le$$

$$\le \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\int\int_{\mathbb{R}^2}\left|\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\delta(t-ih,p-jh)\Psi\left(\frac{x}{h}-i,\frac{y}{h}-j\right)\right|dt\,dp =$$

$$= \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\sum_{\mu=j-2}^{j+2}\sum_{\nu=i-2}^{i+2}\left|\Psi\left(\frac{x}{h}-\nu,\frac{y}{h}-\mu\right)\right| = \|N(x,y)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Функция $N(x,y)$ есть 1-периодическая непрерывная функция по каждой переменной, поэтому существует точка $(\hat{x},\hat{y})$ такая, что

$$N(\hat{x},\hat{y}) = \max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} N(x,y).$$

Через $f_0(x,y)$ обозначим кусочно-постоянную функцию, принимающую значения

$$\operatorname{sign}\Psi\left(\frac{\hat{x}}{h}-i,\frac{\hat{y}}{h}-j\right)$$

на квадратах $\left(x_i - \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}\right) \times \left(y_i - \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\right)$. Тогда

$$\|\psi_h(f_0)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}} \sum_{\mu=j-2}^{j+2} \sum_{\nu=i-2}^{i+2} \left|\Psi\left(\frac{x}{h} - \nu, \frac{y}{h} - \mu\right)\right|.$$

Соотношение (34) следует из (25), (29) и определения функций $N_k(x,y)$ и $N(x,y)$.

4. О погрешности приближения. Положим для $x \in (-1/2, 1/2) \times (-1/2, 1/2)$,

$$K_{\nu,\mu}(x,y) = x^\nu y^\mu - \sum_{j=-2}^{2} \sum_{i=-2}^{2} \left(\int_{\frac{2j-1}{2}}^{\frac{2j+1}{2}} \int_{\frac{2i-1}{2}}^{\frac{2i+1}{2}} t^\nu p^\mu \, dt \, dp \right) \Psi(x-i, y-j).$$

Теорема 1 *Пусть функция f такова, что*

$$\frac{\partial f^{\nu+\mu}}{\partial x^\nu \partial y^\mu} \in C(\mathbb{R}^2) \quad \nu, \mu = 0, 1, \ldots, 3, \quad \nu + \mu \le 3,$$

тогда для $(x,y) \in ((i-1/2)h, (i+1/2)h) \times ((j-1/2)h, (j+1/2)h)$ равномерно по $i, j \in \mathbb{Z}$ выполняется соотношение

$$|f(x,y) - \psi_h(f,x,y)| = \frac{h^3}{12} \left| \sum_{\nu,\mu\ge 0,\, \nu+\mu=3} C_3^i \frac{\partial f^3}{\partial x^\nu \partial y^\mu}\Big|_{(ih,jh)} K_{\nu,\mu}(x,y) \right| + O(h^4). \tag{35}$$

Доказательство. Пусть последовательность $\tilde{F} \in \ell^2_\infty$ такова, что

$$\hat{f}_{\nu,\mu} = \frac{1}{h^2} \int_{(\mu-1/2)h}^{(\mu+1/2)h} \int_{(\nu-1/2)h}^{(\nu+1/2)h} P_2(x,y) \, dx \, dy \quad (\nu,\mu) \in [-2,2] \times [-2,2],$$

где $P_2(x,y)$ произвольный полином второго порядка.

Из третьего метода построения функционала следует, что для ν, μ такого, что $(x_\nu, y_\mu) \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\hat{f}_{\nu,\mu,k} = \frac{4^k}{h^2} \int_{y_{\mu,k} - \frac{h}{2^{k+1}}}^{y_{\mu,k} + \frac{h}{2^{k+1}}} \int_{x_{\nu,k} - \frac{h}{2^{k+1}}}^{x_{\nu,k} + \frac{h}{2^{k+1}}} P_2(x,y) \, dx \, dy.$$

И следовательно, если $h = 1$, то

$$\psi_h(\tilde{F}, x, y) = P_2(x,y), \qquad (x,y) \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Отсюда и из равенства (29) получаем, что для $(x,y) \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и $\nu, \mu = 0, 1, \ldots, n+m \le 2$ справедливы равенства

$$K_{\nu,\mu}(x,y) = 0. \tag{36}$$

Используя разложение по формуле Тейлора в окрестности точки (ih, jh) и учитывая соотношения (36), сразу получаем

$$f(x,y) - \psi_h(f,x,y) =$$

$$= \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big|_{(x_i,y_i)} K_{3,0}(x,y) + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\Big|_{(x_i,y_i)} K_{2,1}(x,y) + \right.$$

$$+ 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\Big|_{(x_i,y_i)}K_{1,2}(x,y) + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\Big|_{(x_i,y_i)}K_{0,3}(x,y)\Bigg) + O(h^4).$$

что и завершает доказательство теоремы.

Положим

$$|||f^{(3)}||| = \max_{\nu,\mu\geq 0,\ \nu+\mu=3}\left\{\left\|\frac{\partial^3 f}{\partial x^\nu \partial y^\mu}\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\right\}$$

и

$$\mathbb{K} = \max_{(x,y)\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\times(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}\left\{\sum_{\nu,\mu\geq 0,\ \nu+\mu=3} C_3^\nu\,|K_{\nu,\mu}(x,y)|\,.\right\}$$

Тогда

$$\|f(x,y)-\psi_h(f,x,y)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{h^3}{6}\mathbb{K}|||f^{(3)}||| + O(h^4).$$

Тот факт, что оператор восстановления $\psi_h(f,x,y)$ можно записать в виде (29) (вместе со свойствами функции $\Psi(x,y)$) позволяет построить метод послойного кодирования и передачи информации.

Для фиксированного $\varepsilon > 0$ положим

$$z_\varepsilon^+ = \begin{cases} z, & |z|\geq\varepsilon, \\ 0, & |z|<\varepsilon \end{cases}$$

и

$$z_\varepsilon^- = z - z_\varepsilon^+. \tag{37}$$

Назовем $\mathfrak{G}_{1,h}(f,x,y) = \psi_h(f,x,y)$ восстановлением функции $f(x,y)$ по первому слою информации. Пусть $f(x,y) - \mathfrak{G}_{1,h}(f,x,y)$ погрешность восстановления по первому слою.

Для $k>1$ восстановление на $k-$м слое информации определим рекуррентными соотношениями

$$\mathfrak{G}_{k,h}(f,x,y) = \mathfrak{G}_{k-1,h}(f,x,y) + g_{h/2^{k-1}}\left((f-\mathfrak{G}_{k-1,h}(f))_\varepsilon^+, x, y\right). \tag{38}$$

Ясно, что

$$f(x,y) - \mathfrak{G}_{k,h}(f,x,y) = f(x,y) - \mathfrak{G}_{k-1,h}(f,x,y) + \psi_{h/2^{k-1}}\left((f-\mathfrak{G}_{k-1,h}(f)) - \right.$$

$$\left. - (f-\mathfrak{G}_{k-1,h}(f))_\varepsilon^-, x, y\right).$$

Из линейности метода $\psi_{h/2^m}$ следует, что

$$f(x,y) - \mathfrak{G}_{k,h}(f,x,y) = f(x,y) - \mathfrak{G}_{k-1,h}(f,x,y) + \psi_{h/2^{k-1}}\left((f-\mathfrak{G}_{k-1,h}(f)), x, y\right) -$$

$$-\psi_{h/2^{k-1}}\left((f-\mathfrak{G}_{k-1,h}(f))_\varepsilon^-, x, y\right) =$$

$$= f(x,y) - \mathfrak{G}_{k-1,h}(f,x,y) + \psi_{h/2^{k-1}}(f,x,y) - \psi_{h/2^{k-1}}\left(\mathfrak{G}_{k-1,h}(f), x, y\right) -$$

$$-\psi_{h/2^{k-1}}\left((f-\mathfrak{G}_{k-1,h}(f))_\varepsilon^-, x, y\right).$$

Отсюда, из (38), свойства (23) и теоремы 4 сразу получаем

$$f(x,y) - \mathfrak{G}_{k,h}(f,x,y) = f(x,y) - \psi_{h/2^{k-1}}(f,x,y) + \theta_k\varepsilon\|N\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)},$$

где $\theta_k = \theta_k(f,h)\in[-1,1]$ и величина $N(x)$ определена соотношением (32).

Таким образом, с учетом $k-$го слоя информации метод $\mathfrak{G}_{k,h}(f)$ восстанавливает искомую функцию с точностью до $\theta_k \varepsilon \|N\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}$ так же, как и первоначальный метод с шагом $h/2^{k-1}$. При этом в реальных задачах количество ненулевых единиц информации, которое требуется для этого, гораздо меньше, чем информации отличной от нуля, необходимой для метода $\psi_{h/2^{k-1}}(f)$.

Список литературы

[1] *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Асимптотические методы восстановления кривых. Киев, Изд. Института математики НАН Украины, 1997.

[2] *Daubechies I.* Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia, 1992.

[3] *Dubuc S.* Interpolation through an Iterative Scheme. Journal of Math. An. and Appl., 1986, 185-204.