УДК 519.21

Быстрый алгоритм биортогонального дискретного всплеск-преобразования.

*В.Ф. Бабенко *,** , А.А. Лигун ***,**, А.А. Шумейко ****
(Украина, *Днепропетровский национальный университет, **Институт прикладной математики и механики НАН Украины, ***Днепродзержинский технический университет)

Введение.

Всплески (wavelets) появились в начале 1980-х годов на стыке теории функций, функционального анализа, обработки сигналов и изображений, квантовой теории поля. Развитие теории всплесков связано с именами А. Гроссмана, Ж. Морлета, Ж. Стремберга, Я. Мейера, С. Малла, И. Добеши и многих др.

Подобно анализу Фурье, теория всплесков находит применение в исследовании частотных характеристик функции f. При описании функций с конечным носителем, сигналов с меняющимися во времени частотами с помощью анализа Фурье возникают трудности, которые объясняются свойствами тригонометрических функций на оси R. Например, преобразование Фурье функции f в случае δ-функции Дирака, имеющей в качестве носителя единственную точку, вырождается в функцию $\widehat{\delta}(\omega) = 1$, распространенную на всю числовую ось. При обработке сигналов с меняющимися частотами анализ Фурье не позволяет выделить частоты, составляющие сигнал в окрестности произвольного момента времени. Аппарат всплесков позволяет автоматически осуществлять локализацию, как по временной, так и в частотной области, что позволило использовать всплески во многих задачах, связанных с обработкой данных в реальном режиме времени.

С момента появления аппарата всплесков, большое внимание уделялось как конструированию базисов всплесков (см., например, [1], [2], [3]), так и разработке быстрых методов всплеск-преобразований (см., например, [3], [4]). На современном этапе среди существующих базисов всплесков наиболее популярными являются биортогональные всплески, а среди методов всплеск-преобразований - каскадная схема.

В данной работе предложена новая конструкция быстрого всплеск- преобразования, основанная на биортогональной системе всплесков, которая позволяет реализовать дискретные всплеск-преобразования с меньшими временными и вычислительными затратами, чем существующие методы.

Основные определения и вспомогательные утверждения.

Введем необходимые в дальнейшем обозначения. Обозначим через $Z^+ = \{2i | i \in Z\}$ множество четных индексов, а через $Z^- = \{2i+1 | i \in Z\}$ множество нечетных.

Массив $F = \{f_i\}_{i \in Z}$ будем называть массивом с конечным носителем, если

$$\exists N > 0 : |i| > N \Longrightarrow f_i = 0.$$

В дальнейшем все рассматриваемые массивы имеют конечный носитель.

Пусть, далее, $\Re$ множество массивов $A = \{a_i\}_{i \in Z}$(с конечным носителем) с симметричными коэффициентами

$$a_{-i} = a_i, \quad (i \in Z). \tag{1}$$

Сдвиг массива A на ν будем обозначать через

$$A_\nu = \{a_{i-\nu}\}_{i \in Z}.$$

Положим

$$\langle A, B_\nu \rangle = \sum_{i \in Z} a_i b_{i-\nu}$$

и

$$A \times B_\nu = \sum_{i \in Z} a_i b_{\nu - i}.$$

Для массива $H \in \Re$ положим

$$H^+ = \begin{cases} h_i, & i \in Z^+, \\ 0, & i \in Z^- \end{cases}$$

и

$$H^- = \begin{cases} 0, & i \in Z^+, \\ h_i, & i \in Z^-, \end{cases}$$

кроме того, пусть

$$\mathbb{H}^+ = H^+ + H^- = \{h_i^+\}_{i \in Z}$$

и

$$\mathbb{H}^- = H^+ - H^- = \{h_i^-\}_{i \in Z}.$$

Лемма 1. *Для всех $\nu \in Z$ имеет место равенство*

$$\left\langle \mathbb{H}^+, \mathbb{H}_\nu^- \right\rangle = 0. \tag{2}$$

Доказательство.Пусть, вначале, $\nu \in Z^-$. Ясно, что

$$\left\langle \mathbb{H}^+, \mathbb{H}_\nu^- \right\rangle = \sum_{i \in Z^+} h_i h_{i-\nu}^- + \sum_{i \in Z^-} h_i h_{i-\nu}^-.$$

Замечая, что если $i \in Z^+$ и $\nu \in Z^-$, то $(i - \nu) \in Z^-$ и, соответственно, если $i \in Z^-$ и $\nu \in Z^-$, то $(i - \nu) \in Z^+$, таким образом имеем равенство

$$\left\langle \mathbb{H}^+, \mathbb{H}_\nu^- \right\rangle = -\sum_{i \in Z^+} h_i h_{i-\nu} + \sum_{i \in Z^-} h_i h_{i-\nu},$$

которое после замены переменных в первом слагаемом можно переписать в виде

$$\left\langle \mathbb{H}^+, \mathbb{H}_\nu^- \right\rangle = -\sum_{i \in Z^-} h_i h_{i+\nu} + \sum_{i \in Z^-} h_i h_{i-\nu}.$$

Отсюда, в силу условия (1) сразу следует справедливость соотношения (2). Для $\nu \in Z^+$ доказательство аналогично.

Будем говорить, что массивы $\mathbb{H}^+$ и $\mathbb{G}^+$ образуют биортогональную пару, если для всех $n, \nu \in Z^+$ имеет место соотношение

$$\left\langle \mathbb{H}_n^+, \mathbb{G}_\nu^+ \right\rangle = \begin{cases} 1, & n = \nu, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases} \tag{3}$$

Лемма 2. *Если массивы $\mathbb{H}^+$ и $\mathbb{G}^+$ образуют биортогональную пару, то для всех $n, \nu \in Z^-$ имеет место соотношение*

$$\left\langle \mathbb{H}_n^-, \mathbb{G}_\nu^- \right\rangle = \begin{cases} 1, & n = \nu, \\ 0, & \textit{otherwise}. \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство. Действительно,

$$\left\langle \mathbb{H}_n^-, \mathbb{G}_\nu^- \right\rangle = \sum_{i \in Z^+} h_{i-n}^- g_{i-\nu}^- + \sum_{i \in Z^-} h_{i-n}^- g_{i-\nu}^-.$$

Замечая, что для $i \in Z^+$

$$h_{i-n}^- = -h_{i-n}$$

и

$$g^{-}_{i-\nu} = -g_{i-\nu}$$

а для $i \in Z^-$

$$h^{-}_{i-n} = h_{i-n}$$

и

$$g^{-}_{i-\nu} = g_{i-\nu}$$

сразу получаем

$$\left\langle \mathbb{H}^{-}_{n}, \mathbb{G}^{-}_{\nu} \right\rangle = \sum_{i\in Z^+} h_{i-n} g_{i-\nu} + \sum_{i \in Z^-} h_{i-n} g_{i-\nu} =$$

$$= \sum_{i\in Z} h_{i-n} g_{i-\nu} = \sum_{i\in Z} h_i g_{i-\nu+n}.$$

Отсюда, из того факта, что $(-\nu+n) \in Z^+$ и из (3) сразу следует утверждение леммы.

Формулировка и доказательство основных результатов.

Положим

$$\mathbb{H}_{\nu} = \{\mathbf{h}_{i-\nu}\}_{i\in Z} = \begin{cases} \mathbb{H}^{+}_{\nu}, & \nu \in Z^+, \\ \mathbb{G}^{-}_{\nu} & \nu \in Z^- \end{cases} \tag{5}$$

и

$$\mathbb{G}_{\nu} = \{\mathbf{g}_{i-\nu}\}_{i\in Z} = \begin{cases} \mathbb{G}^{+}_{\nu}, & \nu \in Z^+, \\ \mathbb{H}^{-}_{\nu} & \nu \in Z^-. \end{cases}$$

Для биортогональной пары $H, G \in \Re$ положим

$$\mathbb{U}_{\nu} = \begin{cases} G^{+}_{\nu} - H^{-}_{\nu}, & \nu \in Z^+, \\ H^{+}_{\nu} + G^{-}_{\nu}, & \nu \in Z^-, \end{cases}$$

и

$$\mathbb{V}_{\nu} = \begin{cases} H^{+}_{\nu} - G^{-}_{\nu}, & \nu \in Z^+, \\ G^{+}_{\nu} + H^{-}_{\nu}, & \nu \in Z^-. \end{cases}$$

Теорема 1. *Если F массив конечным носителем, то*

$$f_{\nu} = \mathbb{C} \times \mathbb{G}_{\nu} = \mathbb{D} \times \mathbb{H}_{\nu},$$

где

$$\mathbb{C} = \{\langle F, \mathbb{H}_n \rangle\}, \mathbb{D} = \{\langle F, \mathbb{G}_n \rangle\}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\mathbb{C} \times \mathbb{G}_{\nu} = \sum_{n\in Z} \langle F, \mathbb{H}_n \rangle \mathbf{g}_{\nu-n} = \sum_{n\in Z} \left(\sum_{k\in Z} f_k \mathbf{h}_{k-n} \right) \mathbf{g}_{\nu-n} = \sum_{k \in Z} f_k \langle \mathbb{H}_{-k}, \mathbb{G}_{-\nu} \rangle.$$

Пусть $\nu, k \in Z^+$,тогда из (3) сразу получаем

$$\langle \mathbb{H}_{-k}, \mathbb{G}_{-\nu} \rangle = \left\langle \mathbb{H}^{+}_{-k}, \mathbb{G}^{+}_{-\nu} \right\rangle = \begin{cases} 1, & k = \nu, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

если $\nu \in Z^+$ и $k \in Z^-$, то в силу (2) имеем

$$\langle \mathbb{H}_{-k}, \mathbb{G}_{-\nu} \rangle = \left\langle \mathbb{G}^{-}_{-k}, \mathbb{G}^{+}_{-\nu} \right\rangle = 0$$

и, следовательно, для $\nu \in Z^+$

$$\mathbb{C} \times \mathbb{G}_{\nu} = \sum_{k\in Z^+} f_k \langle \mathbb{H}_{-k}, \mathbb{G}_{-\nu} \rangle + \sum_{k\in Z^-} f_k \langle \mathbb{H}_{-k}, \mathbb{G}_{-\nu} \rangle = f_{\nu}.$$

Пусть, теперь $\nu \in Z^-$
$$\mathbb{C} \times \mathbb{G}_\nu = \sum_{k \in Z^+} f_k \left\langle \mathbb{H}_{-k}, \mathbb{G}_{-\nu} \right\rangle + \sum_{k \in Z^-} f_k \left\langle \mathbb{H}_{-k}, \mathbb{G}_{-\nu} \right\rangle =$$
$$= \sum_{k \in Z^+} f_k \left\langle \mathbb{H}^+_{-k}, \mathbb{H}^-_{-\nu} \right\rangle + \sum_{k \in Z^-} f_k \left\langle \mathbb{G}^-_{-k}, \mathbb{H}^-_{-\nu} \right\rangle .$$
Отсюда, из (2) и (4) сразу получаем
$$\mathbb{C} \times \mathbb{G}_\nu = f_\nu.$$
Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Таким образом, если у нас построена биортогональная пара массивов, то результаты теоремы 1 предоставляют формулы декомпозиции и реконструкции для любого массива с конечным носителем.

Теорема 2. *Если F массив с конечным носителем, то*
$$F = \left\{ \left\langle \left\langle F, \mathbb{H}_\nu \right\rangle, \mathbb{U}_\nu \right\rangle \right\}_{\nu \in Z} = \left\{ \left\langle \left\langle F, \mathbb{G}_\nu \right\rangle, \mathbb{V}_\nu \right\rangle \right\}_{\nu \in Z} .$$

Действительно, пусть, вначале, $\nu \in Z^+$, тогда из результатов теоремы 1 имеем
$$f_\nu = \sum_{n \in Z} \left\langle F, \mathbb{H}_n \right\rangle \mathbf{g}_{\nu-n} = \sum_{n \in Z^+} \left\langle F, \mathbb{H}_n \right\rangle \mathbf{g}_{\nu-n} + \sum_{n \in Z^-} \left\langle F, \mathbb{H}_n \right\rangle \mathbf{g}_{\nu-n} =$$
$$= \sum_{n \in Z^+} \left\langle F, \mathbb{H}_n \right\rangle g_{\nu-n} + \sum_{n \in Z^-} \left\langle F, \mathbb{H}_n \right\rangle (-h_{\nu-n}) = \left\langle \left\langle F, \mathbb{H}_\nu \right\rangle, \mathbb{U}_\nu \right\rangle .$$
Если $\nu \in Z^-$, то
$$f_\nu = \sum_{i \in Z^+} \left\langle F, \mathbb{H}_{i-\nu} \right\rangle g^+_{i-\nu} + \sum_{i \in Z^-} \left\langle F, \mathbb{H}_{i-\nu} \right\rangle g^-_{i-\nu} =$$
$$= \sum_{i \in Z^+} \left\langle F, \mathbb{H}_{i-\nu} \right\rangle g_{i-\nu} + \sum_{i \in Z^-} \left\langle F, \mathbb{H}_{i-\nu} \right\rangle h_{i-\nu} = \left\langle \left\langle F, \mathbb{H}_\nu \right\rangle, \mathbb{U}_\nu \right\rangle .$$
Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Таким образом, при таком подходе алгоритм обратного хода отличается от алгоритма прямого хода только системой всплесковых коэффициентов. Следовательно, число вычислений для обратного хода всплеск-преобразований равно числу вычислений при прямом ходе.

В реальных задачах при построении цифровых фильтров, основанных на всплесках, используются методы точные на тех или иных тестовых множествах. Как правило, используются методы точные на алгебраических полиномах.

Дальнейшие наши рассуждения посвящены задаче построения методов точных на полиномах.

Для $n = 0, 1, \ldots$ положим
$$M^\pm_n(H) = \sum_{i \in Z^\pm} i^n h_i,$$
$$M_n(H) = \sum_{i \in Z} i^n h_i = M^+_n(H) + M^-_n(H),$$
Заметим, что после замены $i = -k$ в силу условия (1), получаем
$$M^\pm_{2n-1}(H) = \sum_{k \in Z^\pm} (-k)^{2n-1} h_{-k} = -\sum_{k \in Z^\pm} k^{2n-1} h_k = -M^\pm_{2n-1}(H),$$
таким образом,
$$M^\pm_{2n-1}(H) = 0.$$

Отсюда сразу получаем, что если хотя бы одно из значений n или m нечетное, то
$$M_n^{\pm}(H)=0.$$

Кроме того, пусть
$$P^n=\{i^n\}_{i\in Z}\quad (0^0=1).$$

Теорема 3. *Если $H,G\in\Re$ таковы, что*
$$M_0^{\pm}(H)=M_0^{\pm}(G)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
и для $n=0,1,2,\ldots$ 0<n+m<N
$$M_n^{\pm}(H)=M_n^{\pm}(G)=0,$$
то для $\nu\in Z^-$
$$\langle P^n,\mathbb{H}_\nu\rangle=\langle P^n,\mathbb{G}_\nu\rangle=0.$$

Доказательство. Из определения (5) следует, что для $\nu\in Z^-$
$$\langle P^n,\mathbb{H}_\nu\rangle=\left\langle P^n,\mathbb{G}_\nu^-\right\rangle=\sum_{i\in Z}i^n g_{i-\nu}^-=\sum_{i\in Z}(i+\nu)^n g_i^-=$$
$$=\nu^n\sum_{i\in Z^+}g_i+n\nu^{n-1}\sum_{i\in Z^+}ig_i+\ldots+\sum_{i\in Z^+}i^n g_i+$$
$$-\nu^n\sum_{i\in Z^-}g_i-n\nu^{n-1}\sum_{i\in Z^-}ig_i-\ldots-\sum_{i\in Z^-}i^n g_i.$$
Отсюда и из условия теоремы 3 сразу получаем для $\nu\in Z^-$
$$\langle P^n,\mathbb{H}_\nu\rangle=\nu^n M_0^+(G)-\nu^n M_0^-(G)=0.$$
Вторая часть доказывается аналогично.

Следствие 1. *Если $H,G\in\Re$ удовлетворяют условию теоремы 3, то*
$$P^n=\sum_{i\in Z^+}\langle P^n,\mathbb{H}_i\rangle\,\mathbb{G}_i=\sum_{i\in Z^+}\langle P^n,\mathbb{G}_i\rangle\,\mathbb{H}_i.$$

Доказательство.

Пусть, вначале, $n=0$, тогда $P_\nu^0=1$ для всех $\nu\in Z$.

С другой стороны,
$$\left\langle P^0,\mathbb{H}_\nu\right\rangle=\sum_{i\in Z}h_{i-\nu}=\sum_{i\in Z}h_i=M_0(H),$$
и
$$\sum_{i\in Z^+}M_0(H)\mathbb{G}_{i-\nu}=M_0(H)\sum_{i\in Z^+}\mathbb{G}_{i-\nu}.$$
Если $\nu\in Z^+$, то для $i\in Z^+$ будет выполняться условие $(i-\nu)\in Z^+$ и, следовательно,
$$\sum_{i\in Z^+}M_0(H)\mathbb{G}_{i-\nu}=M_0(H)\sum_{i\in Z^+}\mathbb{G}_i=M_0(H)M_0^+(G)=1.$$
Если же $\nu\in Z^-$, то для $i\in Z^+$ будет $(i-\nu)\in Z^-$ и,
$$\sum_{i\in Z^+}M_0(H)\mathbb{G}_{i-\nu}=M_0(H)\sum_{i\in Z^-}\mathbb{G}_i=M_0(H)M_0^-(G)=1.$$
Пусть, далее, n таковы, что $n+m>0$, тогда
$$\langle P^n,\mathbb{H}_\nu\rangle=\sum_{i\in Z}i^n h_{i-\nu}=\sum_{i\in Z}(i+\nu)^n h_i=$$

$$
\begin{gathered}
=\sum_{i\in Z}\left(\sum_{\xi=0}^{n}C_n^{\xi}i^{\xi}\nu^{n-\xi}\right)h_i= \\
=\sum_{i\in Z}\left(\nu^n+n\nu^{n-1}i+\ldots+i^n\right)h_i= \\
=\nu^n\sum_{i\in Z}h_i+n\nu^{n-1}\sum_{i\in Z}ih_i+\ldots+\sum_{i\in Z}i^nh_i= \\
=\nu^n\sum_{i\in Z^+}h_i+n\nu^{n-1}\sum_{i\in Z^+}ih_i+\ldots+\sum_{i\in Z^+}i^nh_i+ \\
+\nu^n\sum_{i\in Z^-}h_i+n\nu^{n-1}\sum_{i\in Z^-}ih_i+\ldots+\sum_{i\in Z^-}i^nh_i.
\end{gathered}
$$

В силу условия теоремы отсюда сразу получаем

$$
\langle P^n,\mathbb{H}_\nu\rangle=\nu^n\sum_{i\in Z}h_i=\nu^nM_0(H).
$$

Далее,

$$
\sum_{i\in Z^+}\langle P^n,\mathbb{H}_\nu\rangle\,\mathbb{G}_{i-\nu}=\sum_{i\in Z^+}\nu^nM_0(H)\mathbb{G}_{i-\nu}
$$

и если $\nu\in Z^+$, то

$$
\sum_{i\in Z^+}\langle P^n,\mathbb{H}_\nu\rangle\,\mathbb{G}_{i-\nu}=\nu^nM_0(H)M_0^+(G)=\nu^n=P_\nu^n
$$

а если $\nu\in Z^-$, то

$$
\sum_{i\in Z^+}\langle P^n,\mathbb{H}_\nu\rangle\,\mathbb{G}_{i-\nu}=\nu^nM_0(H)M_0^-(G)=\nu^n=P_\nu^n.
$$

В качестве примера приведем расчет классической биортогональной пары 3-5 Коэна-Добеши- Фово.

Пусть $n=1$ и потребуем точности на константе. Тогда, следуя теореме 3, коэффициенты a_i $(i=0,1)$ удовлетворяют условию

$$
\left\{\begin{array}{r} a_0=\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ 2a_1=\frac{1}{\sqrt{2}}, \end{array}\right.
$$

а для $n=2$

$$
\left\{\begin{array}{r} b_0+2b_2=\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ 2b_1=\frac{1}{\sqrt{2}}, \end{array}\right.
$$

то есть

$$
b_1=\frac{\sqrt{2}}{4},b_0=-2b_2+\frac{\sqrt{2}}{2}.
$$

В этом случае условие биортогональности имеет вид

$$
\frac{1}{8}+\frac{b_2\sqrt{2}}{2}=0
$$

и

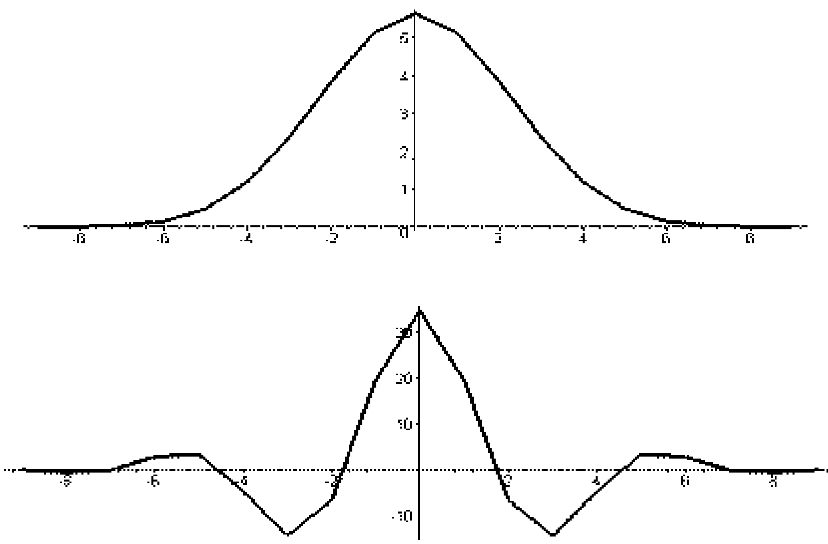
$$
\frac{3}{4}-\sqrt{2}b_2=1.
$$

Таким образом, отсюда сразу получаем биортогональную пару

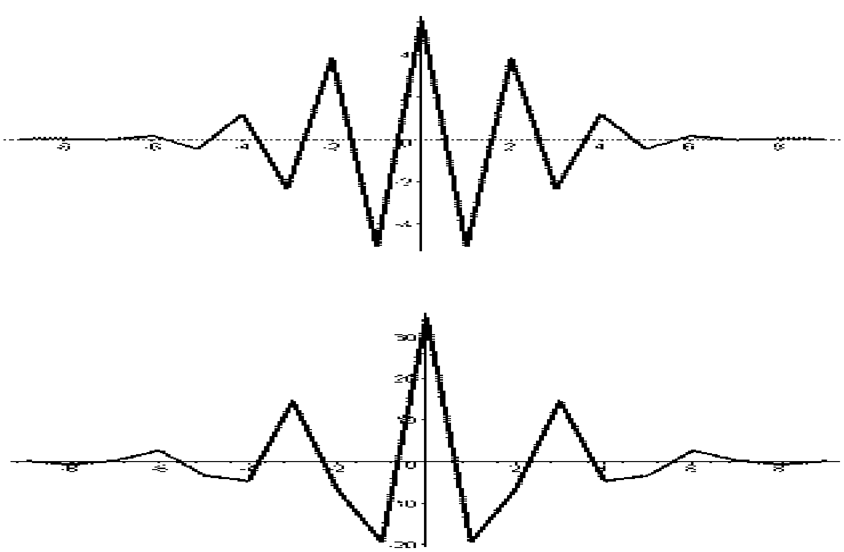
$$a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_1 = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$b_0 = \frac{3\sqrt{2}}{4}, b_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}, b_2 = -\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

На рисунке приведена биортогональная пара масштабирующих функций



и соответствующих всплесковых функций



Выводы.

Реализация полученной схемы быстрого всплеск-преобразования показала, что полученная скорость обработки данных дает возможность использования всплесков не только для традиционных задач обработки изображений и звука, но и для обработки и сжатия видеопотока. Использование метода быстрого всплеск-преобразования может быть использовано в тех областях, где время кодирования сигнала может быть критичным, например, для обработки данных аэрофотосъемки, сейсмической активности и подобное.

Список литературы

[1] *Chui Ch.K.*An Introduction to Wavelets. – San Diego: Academic Press, 1992.
Чуи К. Введение в вейвлеты. – М.: Мир, 2001.

[2] *Babenko V.F., Ligun A., Shumeiko A.* Non-separable wavelets and their application. – Wavelets and Splines. International conference, St,Peterburg, (2003), – p. 10 – 11.

[3] *Daubechies I.* Ten lectures on wavelets. – SIAM, Philadelphia, 1992. – 453 p.
Добеши И. Десять лекций по вейвлетам, Ижевск, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. – 464 с.

[4] *Петухов А.П.* Введение в теорию базисов всплесков. – СПб, Изд. СПбГТУ, 1999 – 132 с.

В статье получена одна конструкция дискретного быстрого всплеск- преобразования, основанная на биортогональной системе всплесков.

Отримано одну конструкцію дискретного швидкого сплеск- перетворення, яке засновано на біортогональній системі сплесків.

In the papers is got the one construction of discrete speed wavelets- transformation, based on the biortogonal wavelets system.